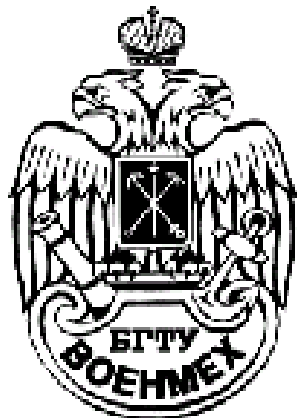


**Балтийский государственный технический  
университет «ВоенМех» имени Д. Ф. Устинова**



**Кафедра А5 «Процессов управления».**

**Курс «Динамика полета».**

(преподаватель: Санников В.А., 68 час., 6 и 7-й семестры)

**Выполнил:  
Лукьященко К. В.  
Группа: А591.  
Проверил:  
Шальгин А. С.**

**Санкт – Петербург  
2004г.**

## Содержание:

### 1. Математическая модель движения жесткого ЛА с переменной массой.

§1. Координатные системы, используемые при описании движения ЛА.	3
Связь между координатными системами. Направляющие косинусы.	
§2. Кинематические соотношения.	
§3. Связь между углами, ориентирующими ЛА в различных системах координат.	7
§4. Уравнение динамики.	8
§5. Уравнение вращательного движения.	9
§6. Учет вращающихся масс внутри ЛА в условиях вращательного движения.	10
§7. Силы и моменты, действующие на ЛА. Их проекции на соответствующие оси.	11
§8. Математическая модель жесткого ЛА.	12
§9. Режимы полета.	14
§10. Учет влияния ветра в задачах динамики ЛА.	16

### 2. Математическая модель тела движущегося в воде:

§1. Движение жидкости, вызванное телом, двигающимся с любой переменной скоростью.	18
§2. Определение гидродинамических реакций.	21
§3. Коэффициенты присоединенных масс.	22

### 3. Учет влияния подвижности жидкого наполнения в задачах динамики ЛА:

§1. Учет колебаний жидкого наполнения в уравнениях движения ЛА.	26
§2. Уравнение плоского движения.	27

### 4. Упругие колебания корпуса:

§1. Учет влияния упругих колебаний корпуса в уравнениях движения.	29
§2. Уравнение упругих поперечных колебаний и его решение.	30
§3. Определение свободных колебаний.	31

Список литературы.	32
--------------------	----

## 1. Математическая модель жесткого ЛА с переменной массой.

Математическая модель состоит из следующих групп уравнений:

1. Уравнение динамики пространственного движения.
2. Кинематическое соотношение, определяющее линейные или угловые координаты ЛА при известных линейных и угловых скоростях.
3. Геометрическое и в-т соотношение, определяющее связь между координатными системами, углами, определяющими ориентацию ЛА в координатной системе, явных выражений для сил и моментов, входящих в уравнение динамики.
4. Уравнения, определяющие закон изменения силы и моментов инерции ЛА в зависимости от времени.
5. Уравнения, определяющие работу систем управления.

### §1. Координатные системы, используемые при описании движения ЛА. Связь между координатными системами. Направляющие косинусы.

Для описания движения ЛА введем в рассмотрение следующие системы координат. Все системы декартовы, прямоугольные и правые.

**1. Стартовая** (земная) с. к.  $O_1 x_0 y_0 z_0$

$O_1$  - точка старта.

$x_0 y_0$  - плоскость стрельбы.

$x_0$  - направлена по направлению стрельбы.

Система неподвижна и инерциальна.

**2. Связанная** с. к.  $O x_1 y_1 z_1$

$O$  – центр масс ЛА.

Система неизменно связана с ЛА, т. е. Во вращательном движении ЛА она имеет три степени свободы и её вращение воспроизводит вращение ЛА.

$y_1 \perp x_1$  лежит в плоскости симметрии ЛА.

**3. Скоростная** с. к.  $O x y z$

$x$  совпадает со  $\bar{V}_{ц.м.}$ .

$y \perp x$  и лежит в плоскости симметрии  $(x_1 y_1)$ , данная система также имеет три степени свободы, т.е. её ориентация определяется тремя углами относительно инерциальной системы.

**4. Полусвязанная** с. к.  $O x_2 y_2 z_2$ . (полуподвижная).

$O$  - центр масс ЛА.

$x_2$  - совпадает с  $x_1$ .

$y_2 \perp x_2$  и лежит в вертикальной плоскости, проходящей через ось ЛА. Система имеет две степени свободы.

**5. Полускоростная** с. к.  $O x_* y_* z_*$ .

$x_*$  совпадает с  $x$ .

$y_0$  перпендикулярна  $x_0$  и лежит в вертикальной плоскости, проходящей через вектор скорости. Система имеет две степени свободы.

**Взаимная ориентация**  $x_1 y_1 z_1$  и  $x_0 y_0 z_0$  определяется углами:

$\psi$  - угол рыскания.  $\vartheta$  - угол тангажа.  $\gamma$  - угол крена.

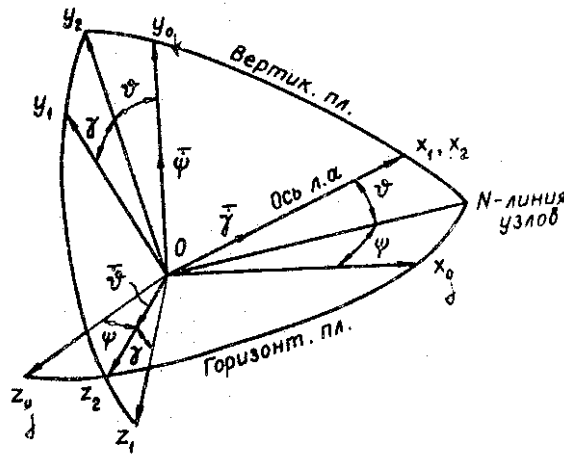


Рис. 1.1.1.

С помощью таблицы направляющих косинусов можно определить взаимное расположение связанной и земной с.к.

Таблица направляющих cos. 1.1.1.

	$x_1$	$y_1$	$z_1$	
$x_0$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$\bar{i}_0$
$y_0$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$\bar{j}_0$
$z_0$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$\bar{k}_0$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad A^T = A^{-1}; \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad A = (\psi, \vartheta, \gamma).$$

Имея эту таблицу мы можем перейти от одной с. к. к другой:

$$x_0 = a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1$$

$$y_0 = a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1$$

$$z_0 = a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1$$

В матричном виде: 
$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти направляющий cos необходимо единичный вектор первого направления спроектировать на др. При этом, если угол между двумя направлениями не обозначен,

необходимо предварительно единичный вектор разбить на компоненты исх. системы и каждый компонент спроектировать на нужное направление.

Применим это правило:

$$a_{11} = \cos(x_0 \wedge x_1) = (\bar{i}_0 \cdot \bar{i}_1) = \cos \vartheta \cos \psi.$$

$$\bar{i}_1 \begin{cases} \cos \vartheta \cdot \cos \psi \\ \sin \vartheta \cdot \cos 90^\circ \end{cases}$$

$$a_{12} = \cos(x_0 \wedge y_1) = (\bar{i}_0 \cdot \bar{j}_1) = \sin \gamma \sin \psi - \sin \vartheta \cos \gamma \cos \psi$$

$$\bar{j}_1 \begin{cases} \cos \gamma \cdot \begin{cases} \cos \vartheta \cdot 0 \\ -\sin \vartheta \cdot \cos \psi \end{cases} \\ \sin \gamma \cdot \cos(90 - \psi) \end{cases}$$

$$a_{13} = \cos(x_0 \wedge z_1) = (\bar{i}_0 \cdot \bar{k}_1) = \cos \gamma \sin \psi + \sin \gamma \sin \vartheta \cos \psi$$

$$\bar{k}_1 \begin{cases} \cos \gamma \cdot \sin \psi \\ -\sin \gamma \cdot \begin{cases} -\sin \vartheta \cdot \cos \psi \\ \cos \psi \cdot 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$a_{21} = \sin \vartheta$$

$$a_{31} = -\cos \vartheta \sin \psi$$

$$a_{22} = \cos \vartheta \cos \gamma$$

$$a_{32} = \cos \psi \sin \gamma + \cos \gamma \sin \vartheta \sin \psi$$

$$a_{23} = -\sin \gamma \cos \vartheta$$

$$a_{33} = \cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma$$

Сумма попарных произведений элементов любой строки (столбца) по элементам другой строки (столбца) = 0.

**Взаимное расположение**  $x_0 y_0 z_0$  и  $x_{0*} y_{0*} z_{0*}$  определяется углами:

$\Theta$  - угол возвышения – это угол между вектором скорости и горизонтальной плоскостью.

$\Psi$  - угол курса – угол между проекцией скорости на горизонтальную плоскость и плоскостью стрельбы.  $\gamma_c$  - скоростной угол крена.

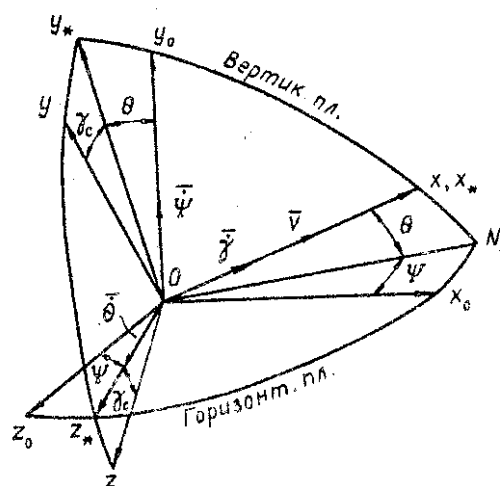


рис.1.1.2.

Таблица направляющих COS.

	$x$	$y$	$z$
$x_0$	$b_{11}$	$b_{12}$	$b_{13}$

$y_0$	$b_{21}$	$b_{22}$	$b_{23}$
$z_0$	$b_{31}$	$b_{32}$	$b_{33}$

$$B = (\Psi, \Theta, \gamma_c)$$

$$b_{11} = \cos \Theta \cdot \cos \Psi$$

$$b_{21} = \sin \Theta$$

$$b_{ij} = a_{ij}$$

$$\psi = \Psi$$

$$\vartheta = \Theta$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix};$$

$$B^T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

$$V_{x0} = V_{b11} = V \cos \Theta \cos \Psi$$

$$V_{y0} = V_{b21} = V \sin \Theta$$

$$V_{z0} = V_{b31} = -V \cos \Theta \sin \Psi$$

$$\cos \Psi = 1$$

$$\sin \Psi = \Psi$$

**Взаимное расположение**  $x_1, y_1, z_1$  и  $x, y, z$  определяется:

$\alpha$  - угол атаки – угол между проекцией вектора скорости на плоскость симметрии и осью ЛА.

$\beta$  - угол скольжения – угол между вектором скорости и плоскостью симметрии.

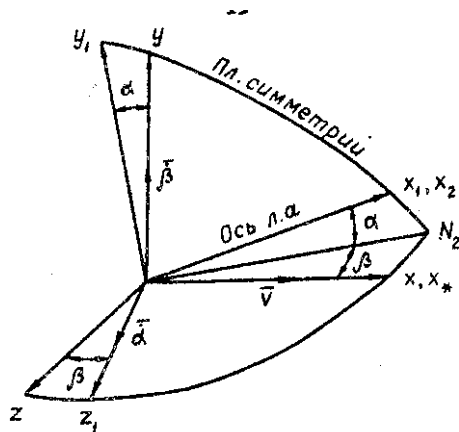


рис.1.1.3.

Таблица направляющих COS

	$x_1$	$y_1$	$z_1$
$x$	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$
$y$	$c_{21}$	$c_{22}$	$c_{23}$
$z$	$c_{31}$	$c_{32}$	$c_{33}$

$$C = (\alpha, \beta)$$

Запишем элементы матрицы:

$$c_{11} = \cos(x \wedge x_1) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \approx 1$$

$$c_{12} = \cos(x \wedge y_1) = -\sin \alpha \cos \beta \approx -\alpha$$

$$c_{13} = \cos(x \wedge z_1) = \cos(90 - \beta) = \sin \beta \approx \beta$$

$$c_{21} = \cos(y \wedge x_1) = \sin \alpha \approx \alpha$$

$$c_{22} = \cos \alpha \approx 1$$

$$c_{23} = \cos(z_1 \wedge y) = 0$$

$$c_{31} = \cos(z \wedge x_1) = -\cos \alpha \sin \beta \approx -\beta$$

$$c_{32} = \cos(z \wedge y_1) = \sin \alpha \sin \beta \approx 0$$

$$c_{33} = \cos \beta \approx 1$$

$\alpha, \beta$  - малые углы  $\Rightarrow \sin \alpha \approx \alpha \quad \cos \alpha \approx \cos \beta \approx 1 \quad \sin \beta \approx \beta$ ., а проекциями малых

величин можно пренебречь ( $\alpha \cdot \beta = 0$ )  $\Rightarrow C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ .

Линейные преобразования:  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}; \quad C^{-1} = C^T; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

Запишем проекции  $V$  на оси  $x_1, y_1, z_1$ .

$$V_{x1} = VC_{11} = V \cos \alpha \cos \beta \approx V$$

$$V_{y1} = VC_{12} = -V \sin \alpha \cos \beta \approx -V\alpha$$

$$V_{z1} = VC_{13} = V \sin \beta \approx V\beta$$

$$\alpha \approx -\frac{V_{y1}}{V} \quad \beta \approx \frac{V_{z1}}{V}.$$

## §2. Кинематические соотношения.

Кинематические соотношения определяют координаты центра масс и углы Эйлера.  $O_1$  - точка старта. Принимаем её неподвижной, тогда

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

$$\bar{r} = x_0 \bar{i}_0 + y_0 \bar{j}_0 + z_0 \bar{k}_0$$

При дифференцировании предыдущего уравнения получим:

$$\frac{dx_0}{dt} = V_{x0} = V \cos \Theta \cos \Psi]$$

$$\frac{dy_0}{dt} = V_{y0} = V \sin \Theta$$

$$\frac{dz_0}{dt} = V_{z0} = -V \cos \Theta \sin \Psi$$

Для определения углов Эйлера обратимся к рис.1.

Т. к. связанную с. к. можно совместить со стартовой при помощи трёх поворотов по углам  $\psi, \vartheta, \gamma$ , а связанная с. к. неизменно связана с ЛА, то абсолютное значение угловой

скорости ЛА:  $\bar{\omega} = \bar{\psi} + \bar{\vartheta} + \bar{\gamma}$ .

Используя рис.1. запишем выражение для проекций  $\bar{\omega}$  на  $x_1, y_1, z_1$ , для чего необходимо смотреть на эти вектора и каждый вектор проецировать на соответствующие оси:

- 1)  $\omega_{x1} = \dot{\gamma} + \dot{\psi} \sin \vartheta$
- 2)  $\omega_{y1} = \dot{\psi} \cos \vartheta \cos \gamma + \dot{\vartheta} \sin \gamma \quad | \times \sin \gamma$
- 3)  $\omega_{z1} = -\dot{\psi} \cos \vartheta \sin \gamma + \dot{\vartheta} \cos \gamma \quad | \times \cos \gamma$

Выразим  $\dot{\vartheta}, \dot{\psi}, \dot{\gamma}$  - искомые кинематические соотношения, определяющие закон изменения эйлеровых углов.

$$\dot{\vartheta} = \omega_{y1} \sin \gamma + \omega_{z1} \cos \gamma$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\cos \vartheta} (\omega_{y1} \cos \gamma - \omega_{z1} \sin \gamma)$$

$$\dot{\gamma} = \omega_{x1} - \operatorname{tg} \vartheta (\omega_{y1} \cos \gamma - \omega_{z1} \sin \gamma)$$

$$\sin \gamma \approx \gamma \quad \cos \gamma \approx 1$$

$\omega_{x1}, \omega_{y1}, \omega_{z1}$  - малы, крен обычно стабилизируется, что дает возможность работы управляющих органов.

$$\frac{d\vartheta}{dt} \approx \omega_{z1} \quad \frac{d\psi}{dt} \approx \frac{1}{\cos \vartheta} \omega_{y1} \quad \frac{d\gamma}{dt} \approx \omega_{x1} - \omega_{y1} \operatorname{tg} \vartheta - \text{ для нахождения эйлеровых углов.}$$

### §3. Связь между углами, ориентирующими ЛА в различных с. к.

Для решения можно воспользоваться линейными преобразованиями:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix};$$

Найдем связь между этими соотношениями:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = BC \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = B \cdot C \quad B = A \cdot C^T \quad C = A \cdot B^T.$$

$$\text{т. к. } A = (\psi, \vartheta, \gamma) \quad B = (\Psi, \Theta, \gamma_c) \quad C = (\alpha, \beta)$$

можно вычислить любую величину.

Воспользуемся  $B = A \cdot C^{-1}$ . Определим какой из углов наиболее просто входит в состав матрицы.

$$b_{21} = \sin \Theta = a_{21}c_{11} + a_{22}c_{12} + a_{23}c_{13} = \sin \vartheta \cos \alpha \cos \beta - \cos \vartheta \cos \gamma \sin \alpha \cos \beta - \cos \vartheta \sin \gamma \sin \beta$$

*учитывая малость*  $\approx \sin \vartheta - \alpha \cos \vartheta \approx \sin \vartheta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \vartheta = \sin(\vartheta - \alpha)$ .

$$\text{т. о. } \Theta \approx \vartheta - \alpha$$

Найдем  $\Psi$ .

$$b_{21} = -\cos \Theta \sin \Psi = a_{31}c_{11} + a_{32}c_{12} + a_{33}c_{13} =$$

= подставив, получим точное выражение -  $\alpha, \beta, \gamma$  - малы  $\Rightarrow$

$$= -\cos \Theta \sin \Psi \approx -\sin \psi \cos \vartheta - \beta \cos \psi. \quad (\text{если } \psi, \Psi \text{ малы, то БР})$$

$$\text{т. о. } \Psi = \psi - \frac{\beta}{\cos \Theta}$$

$$b_{23} = -\sin \gamma \cos \Theta = a_{21}c_{31} + a_{22}c_{32} + a_{23}c_{33} = \gamma_c \approx \gamma \frac{\cos \vartheta}{\cos \Theta} + \beta \frac{\sin \vartheta}{\cos \Theta}$$



когда  $\Theta$  мал, то  $\gamma_c \approx \gamma$ .

#### §4. Уравнение динамики.

Для вывода уравнения поступательного движения воспользуемся уравнением Мещерского:

$$m(t) \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{R} + \bar{G} + \bar{F}_A.$$

Каждое векторное уравнение эквивалентно трем уравнениям в проекциях. Уравнение можно рассматривать в проекциях на любую из координатных систем. Рассмотрим две из них: полускоростную  $0x_\bullet y_\bullet z_\bullet$  и связанную  $0x_1 y_1 z_1$ .

Запишем уравнения поступательного движения:

$$(1) \quad \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{dV}{dt} \bar{i}.$$

$$(2) \quad \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{dV_{x1}}{dt} \bar{i}_1 + \frac{dV_{y1}}{dt} \bar{j}_1 + \frac{dV_{z1}}{dt} \bar{k}_1$$

$$\text{Угловые скорости равны: для первого случая:} \quad \bar{\omega}_{CK} = \bar{\omega}_\bullet = \dot{\Psi} \bar{i}_\bullet + \dot{\Theta} \bar{k}_\bullet \quad (1)$$

$$\text{для второго случая:} \quad \bar{\omega}_{CK} = \bar{\omega} = \dot{\vartheta} \bar{i} + \dot{\psi} \bar{j} + \dot{\gamma} \bar{k} \quad (2)$$

$$(1) \quad \bar{\omega}_\bullet \times \bar{V} = \begin{vmatrix} \bar{i}_\bullet & \bar{j}_\bullet & \bar{k}_\bullet \\ \omega_{x\bullet} & \omega_{y\bullet} & \omega_{z\bullet} \\ V & 0 & 0 \end{vmatrix} = V(\bar{j}_\bullet \omega_{z\bullet} - \bar{k}_\bullet \omega_{y\bullet}) = V(\bar{j}_\bullet \dot{\Theta} - \bar{k}_\bullet \dot{\Psi} \cos \Theta)$$

$$\omega_{y\bullet} = \dot{\Psi} \cos \Theta; \quad \omega_{z\bullet} = \dot{\Theta}.$$

$$(2) \quad \bar{\omega} \times \bar{V} = \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ \omega_{x1} & \omega_{y1} & \omega_{z1} \\ V_{x1} & V_{y1} & V_{z1} \end{vmatrix} = \bar{i}_1(\omega_{y1} V_{z1} - \omega_{z1} V_{y1}) + \bar{j}_1(\omega_{z1} V_{x1} - \omega_{x1} V_{z1}) + \bar{k}_1(\omega_{x1} V_{y1} - \omega_{y1} V_{x1})$$

$$V_{x1} \approx V; \quad V_{y1} \approx -V\alpha; \quad V_{z1} \approx V\beta.$$

Используя полученные соотношения, запишем уравнения поступательного движения:

$$(1) \quad \begin{cases} m \frac{dV}{dt} = R_{x\bullet} + G_{x\bullet} + F_{Ax\bullet} \\ mV \frac{d\Theta}{dt} = R_{y\bullet} + G_{y\bullet} + F_{Ay\bullet} \\ -mV \cos \Theta \frac{d\Psi}{dt} = R_{z\bullet} + G_{z\bullet} + F_{Az\bullet} \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} m \left( \frac{dV_{x1}}{dt} + \omega_{y1} V_{z1} - \omega_{z1} V_{y1} \right) = R_{x1} + G_{x1} + F_{Ax1} \\ m \left( \frac{dV_{y1}}{dt} + \omega_{z1} V_{x1} - \omega_{x1} V_{z1} \right) = R_{y1} + G_{y1} + F_{Ay1} \\ m \left( \frac{dV_{z1}}{dt} + \omega_{x1} V_{y1} - \omega_{y1} V_{x1} \right) = R_{z1} + G_{z1} + F_{Az1} \end{cases}$$

## §5. Уравнение вращательного движения.

Имеем уравнение:

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \bar{M}_R + \bar{M}_A$$

$L_0$  - момент количества движения – кинетический момент.

Выбираем с. к. Чаще всего используется связанная с. к.  $Ox_1y_1z_1$

Т. к. моменты инерции входящие в уравнение будут изменяться относительно осей из-за изменения массы и не будут зависеть от вращения ЛА, т. к. вращение связанной с. к. воспроизводит вращение ЛА.

Иногда используют полусвязанную с. к.  $Ox_2y_2z_2$ ,  
имеющую угловую скорость  $\bar{\omega} = \dot{\vartheta} + \dot{\psi}$ .

А т. к. у нас осесимметричный ЛА, то момент инерции = const, даже при повороте осей.

Будем использовать связанную с. к.

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \frac{d\tilde{L}}{dt} + \bar{\omega}_{CK} \times \bar{L}, \quad \text{где } \bar{\omega}_{CK} = \bar{\omega}.$$

$$\begin{aligned} \bar{L} &= L_{x1}\bar{i}_1 + L_{y1}\bar{j}_1 + L_{z1}\bar{k}_1 \\ L_{x1} &= I_{x1}\omega_{x1} - I_{x1y1}\omega_{y1} - I_{x1z1}\omega_{z1} \\ L_{y1} &= I_{y1}\omega_{y1} - I_{y1x1}\omega_{x1} - I_{y1z1}\omega_{z1} \\ L_{z1} &= I_{z1}\omega_{z1} - I_{z1x1}\omega_{x1} - I_{z1y1}\omega_{y1} \end{aligned}$$

причем  $\bar{\omega}(\omega_{x1}, \omega_{y1}, \omega_{z1})$  - абсолютная угловая скорость ЛА (проекции на связанную с. к.)

$I_{x1}, I_{y1}, I_{z1}$  - осевые моменты инерции массы.

$$I_{x1} = \int_{(M)} (y_1^2 + z_1^2) dm$$

$I_{x1y1}$  - центробежные моменты инерции.

$$I_{x1y1} = \int_{(M)} x_1 y_1 dm$$

$$\bar{L} = \begin{pmatrix} L_{x1} \\ L_{y1} \\ L_{z1} \end{pmatrix}; \quad \bar{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_{x1} \\ \omega_{y1} \\ \omega_{z1} \end{pmatrix}; \quad A_y = \begin{pmatrix} I_{x1x1} & -I_{x1y1} & -I_{x1z1} \\ -I_{y1x1} & I_{y1y1} & -I_{y1z1} \\ -I_{z1x1} & -I_{z1y1} & I_{z1z1} \end{pmatrix}.$$

Тогда  $\bar{L} = A_y \bar{\omega}$ .

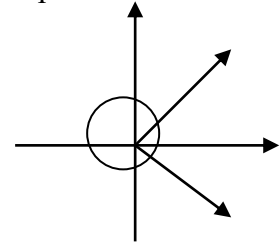
Если ЛА имеет самолетную схему, т. е.  $x_1y_1$ - плоскость симметрии, то равны нулю все центробежные моменты, содержащие координаты  $x_i$  и  $y_i$ .

$$I_{z1x1} = I_{z1y1} = 0$$

Если  $x_1$  - ось симметрии, то все центробежные моменты инерции равны нулю.

$$L_{x1} = I_{x1}\omega_{x1}; \quad L_{y1} = I_{y1}\omega_{y1}; \quad L_{z1} = I_{z1}\omega_{z1}.$$

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \frac{d\tilde{L}}{dt} + \bar{\omega}_x \times \bar{L}_0$$



$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = I_{X1} \frac{d\omega_{X1}}{dt} \bar{i}_1 + I_{Y1} \frac{d\omega_{Y1}}{dt} \bar{j}_1 + I_{Z1} \frac{d\omega_{Z1}}{dt} \bar{k}_1$$

$$\bar{\omega} \times \bar{L}_0 = \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ \omega_{X1} & \omega_{Y1} & \omega_{Z1} \\ I_{X1}\omega_{X1} & I_{Y1}\omega_{Y1} & I_{Z1}\omega_{Z1} \end{vmatrix} = \bar{i}_1 (I_{Z1}\omega_{Z1}\omega_{Y1} - I_{Y1}\omega_{Y1}\omega_{Z1}) + \bar{j}_1 (I_{X1}\omega_{X1}\omega_{Z1} - I_{Z1}\omega_{Z1}\omega_{X1}) + \bar{k}_1 (I_{Y1}\omega_{Y1}\omega_{X1} - I_{X1}\omega_{X1}\omega_{Y1})$$

Уравнения Эйлера:

$$I_{X1} \frac{d\omega_{X1}}{dt} + (I_{Z1} - I_{Y1})\omega_{Z1}\omega_{Y1} = M_{RX1} + M_{AX1}$$

$$I_{Y1} \frac{d\omega_{Y1}}{dt} + (I_{X1} - I_{Z1})\omega_{X1}\omega_{Z1} = M_{RY1} + M_{AY1}$$

$$I_{Z1} \frac{d\omega_{Z1}}{dt} + (I_{Y1} - I_{X1})\omega_{Y1}\omega_{X1} = M_{RZ1} + M_{AZ1}$$

Если объект управляемый, т. е.  $(\omega_{X1}, \omega_{Y1}, \omega_{Z1})$ - малые величины, то в уравнениях пропадут вторые слагаемые.

## §6. Учет вращающихся масс внутри ЛА в условиях вращательного движения.

] имеем ЛА внутри которого находится три маховика, расположенных вдоль осей ЛА.

$I_{MX1}$  - момент инерции маховика.

$m_1$  - масса маховика.

Маховики вращаются относительно осей с угловыми скоростями:  $\bar{\Omega}(\Omega_{X1}^{(1)}, \Omega_{Y1}^{(2)}, \Omega_{Z1}^{(3)})$ .- относительная угловая скорость вращения маховиков.

$\bar{\omega}(\omega_{X1}, \omega_{Y1}, \omega_{Z1})$  - абсолютная угловая скорость вращения ЛА.

$m_1, m_2, m_3$  - малы по сравнению с массой ЛА, точечные массы.

$$\bar{L} = L_{X1}\bar{i}_1 + L_{Y1}\bar{j}_1 + L_{Z1}\bar{k}_1$$

$$L_{X1} = I_{X1}\omega_{X1} + I_{MX1}\Omega_{X1}$$

$$L_{Y1} = I_{Y1}\omega_{Y1} + I_{MY1}\Omega_{Y1}$$

$$L_{Z1} = I_{Z1}\omega_{Z1} + I_{MZ1}\Omega_{Z1}$$

$$I_{X1} = I_1 + I'_{MX1} \quad I'_{MX1} = I_{MX1} + (m_2 + m_3)d^2$$

$$I_{Y1} = I_2 + I'_{MY1} \quad I'_{MY1} = I_{MY1} + (m_1 + m_3)d^2$$

$$I_{Z1} = I_3 + I'_{MZ1} \quad I'_{MZ1} = I_{MZ1} + (m_2 + m_1)d^2$$

$I_1, I_2, I_3$  - моменты инерции ракеты без маховиков, относительно соответствующих осей.

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \left( I_{X1} \frac{d\omega_{X1}}{dt} + I_{MX1} \frac{d\Omega_{X1}}{dt} \right) \bar{i}_1 + \left( I_{Y1} \frac{d\omega_{Y1}}{dt} + I_{MY1} \frac{d\Omega_{Y1}}{dt} \right) \bar{j}_1 + \left( I_{Z1} \frac{d\omega_{Z1}}{dt} + I_{MZ1} \frac{d\Omega_{Z1}}{dt} \right) \bar{k}_1$$

$$\bar{\omega} \times \bar{L} = \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ \omega_{x1} & \omega_{y1} & \omega_{z1} \\ I_{x1}\omega_{x1} + I_{mx1}\Omega_{x1} & I_{y1}\omega_{y1} + I_{my1}\Omega_{y1} & I_{z1}\omega_{z1} + I_{mz1}\Omega_{z1} \end{vmatrix}.$$

## §7. Силы и моменты, действующие на ЛА. Их проекции на соответствующие оси.

Будем учитывать действие на ЛА следующих сил: аэродинамических сил, тяги и веса.

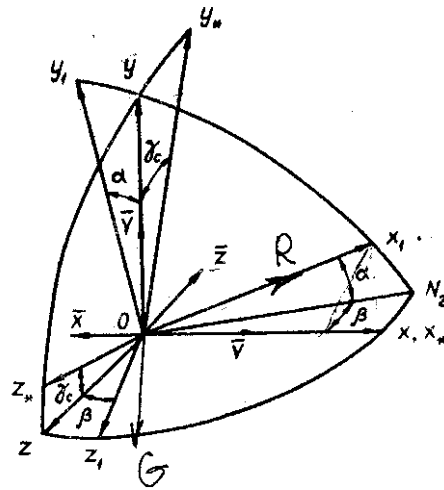


рис.1.7.1.

Аэродинамические силы и моменты.

$\bar{F}_A = F_{AX}\bar{i} + F_{AY}\bar{j} + F_{AZ}\bar{k}$  - главный вектор аэродинамических сил.

$F_{AX} = -X$  - сила лобового сопротивления.

$F_{AY} = Y$  - подъемная сила.

$F_{AZ} = -Z$  - боковая сила.

$c_X = c_X(M, \alpha, \beta, \delta_B, \delta_H, \delta_\vartheta)$

$c_Y = c_Y(M, \alpha, \delta_B)$

$c_Z = c_Z(M, \beta, \delta_H)$

$$\begin{cases} c_X = c_{X0} + A\alpha + B\beta + C\delta_B + D\delta_H + E\delta_\vartheta + \dots \\ c_Y = c_{Y0} + c_Y^\alpha \alpha + c_Y^{\delta_B} \delta_B + \dots \\ c_Z = c_{Z0} + c_Z^\beta \beta + c_Z^{\delta_H} \delta_H + \dots \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} x_{\bullet} \\ y_{\bullet} \\ z_{\bullet} \end{cases} \begin{aligned} F_{AX_{\bullet}} &= -X \\ F_{AY_{\bullet}} &= Y \cos \gamma_c + Z \sin \gamma_c \\ F_{AZ_{\bullet}} &= Y \sin \gamma_c - Z \cos \gamma_c \end{aligned}$$

$$2) \begin{cases} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{cases} \begin{aligned} F_{AX_1} &= -X \cos \alpha \cos \beta + Y \sin \alpha + Z \sin \beta \cos \alpha \approx -X + Y\alpha \approx -X \\ F_{AY_1} &= Y \cos \alpha + X \sin \alpha \cos \beta - Z \sin \alpha \sin \beta \approx Y + X\alpha \\ F_{AZ_1} &= -X \sin \beta - Z \cos \beta \approx -X\beta - Z \end{aligned}$$

] тяга по оси ЛА:

$$\bar{M}_A = M_{AX_1} \bar{i}_1 + M_{AY_1} \bar{j}_1 + M_{AZ_1} \bar{k}_1$$

$$M_{AX_1} = \frac{1}{2} m_{X_1} \rho S V^2 l_1 - \text{момент крена.}$$

$$M_{AY_1} = \frac{1}{2} m_{Y_1} \rho S V^2 l_2 - \text{момент рыскания.}$$

$$M_{AZ_1} = \frac{1}{2} m_{Z_1} \rho S V^2 l_3 - \text{момент тангажа.}$$

$$l_1 = l_2 = l_3 = d - l$$

$m_{X_1}, m_{Y_1}, m_{Z_1}$  - безразмерные коэффициенты моментов.

$$m_{X_1} = m_{X_1} \left( M, \alpha, \beta, \delta_H, \delta_{\mathcal{D}}, \frac{\omega_{X_1} l}{V}, \frac{\omega_{Y_1} l}{V} \right)$$

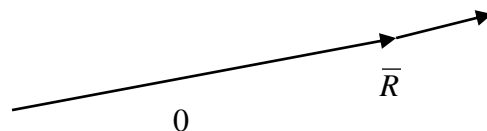
$$m_{Y_1} = m_{Y_1} \left( M, \beta, \delta_H, \delta_{\mathcal{D}}, \frac{\omega_{X_1} l}{V}, \frac{\omega_{Y_1} l}{V}, \frac{\dot{\beta} l}{V} \right)$$

$$m_{Z_1} = m_{Z_1} \left( M, \alpha, \delta_B, \frac{\omega_{Z_1} l}{V}, \frac{\dot{\alpha} l}{V} \right)$$

Тяга:

$$\bar{R} = R_{X_1} \bar{i}_1 + R_{Y_1} \bar{j}_1 + R_{Z_1} \bar{k}_1$$

$$\bar{R} = R \cdot \bar{i}_1$$



$$R_{X_{\bullet}} = R \cos \alpha \cos \beta \approx R$$

$$R_{Y_{\bullet}} = R \sin \alpha \cos \gamma_c + R \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_c \approx R\alpha \cos \gamma_c + R\beta \sin \gamma_c$$

$$R_{Z_{\bullet}} \approx -R\beta$$

$$\bar{M}_R = M_{RX_1} \bar{i}_1 + M_{RY_1} \bar{j}_1 + M_{RZ_1} \bar{k}_1 - \text{выражение момента в связ. с. к.}$$

Эксцентриситет тяги – главный фактор

Вес:

$$\text{В стартовой с. к.: } \bar{G} = -G \bar{j}_0$$

Обратимся к рис.1 и рис.2 и таблицам направляющих косинусов.

$$\left. \begin{aligned} G_{X_1} &= -Ga_{21} = -G \sin \vartheta \\ G_{Y_1} &= -Ga_{22} = -G \cos \vartheta \cos \gamma \\ G_{Z_1} &= -Ga_{23} = G \cos \vartheta \sin \gamma \end{aligned} \right\} - \text{связанная с. к.}$$

$$\left. \begin{aligned} G_{x\bullet} &= -G \sin \Theta \\ G_{y\bullet} &= -G \cos \Theta \\ G_{z\bullet} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ - полускоростная с.к.}$$

### §8. Математическая модель жесткого ЛА.

Имеем систему уравнений, описывающую движение ЛА:

- 1.)  $m \frac{dV}{dt} = R \cos \alpha \cos \beta - X - G \sin \Theta$
- 2.)  $mV \frac{d\Theta}{dt} = (R \sin \alpha + Y) \cos \gamma_c + (R \cos \alpha \sin \beta - Z) \sin \gamma_c - G \cos \Theta$
- 3.)  $-mV \cos \Theta \frac{d\vartheta}{dt} = (R \sin \alpha + Y) \sin \gamma_c - (R \cos \alpha \sin \beta + Z) \cos \gamma_c$
- 4.)  $I_{x1} \frac{d\omega_{x1}}{dt} + \omega_{y1} \omega_{z1} (I_{z1} - I_{y1}) = M_{rx1} + \frac{1}{2} m_{x1} \rho S V^2 l$
- 5.)  $I_{y1} \frac{d\omega_{y1}}{dt} + \omega_{x1} \omega_{z1} (I_{z1} - I_{x1}) = M_{ry1} + \frac{1}{2} m_{y1} \rho S V^2 l$
- 6.)  $I_{z1} \frac{d\omega_{z1}}{dt} + \omega_{x1} \omega_{y1} (I_{y1} - I_{x1}) = M_{rz1} + \frac{1}{2} m_{z1} \rho S V^2 l$
- 7.)  $\frac{d\gamma}{dt} = \omega_{x1} - \operatorname{tg} \vartheta (\omega_{y1} \cos \gamma - \omega_{z1} \sin \gamma)$
- 8.)  $\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\cos \gamma}$
- 9.)  $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_{y1} \sin \gamma + \omega_{z1} \cos \gamma$
- 10.)  $\frac{dx_0}{dt} = V \cos \Theta \cos \psi$
- 11.)  $\frac{dy_0}{dt} = V \sin \Theta$
- 12.)  $\frac{dz_0}{dt} = -V \cos \Theta \sin \psi$
- 13.)  $\sin \Theta \approx \cos \alpha \cos \beta \sin \vartheta - (\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma) \cos \vartheta$
- 14.)  $\sin \Psi \cos \Theta = \cos \alpha \cos \beta \sin \psi \cos \vartheta + \sin \alpha \cos \beta (\cos \psi \sin \gamma + \cos \gamma \sin \psi) -$   
 $\quad - \sin \beta (\cos \psi \cos \gamma - \sin \gamma \sin \vartheta \sin \psi)$
- 15.)  $\sin \gamma_c \cos \Theta = \cos \alpha \sin \beta \sin \vartheta - (\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \beta \sin \gamma) \cos \vartheta$

$$16.) \delta_B = \delta_B(\vartheta, \omega_z, y_0 \dots)$$

$$17.) \delta_H = \delta_H(\psi, \omega_{y1}, z_0 \dots)$$

$$18.) X = \frac{1}{2} c_x \rho S V^2$$

$$Y = \frac{1}{2} c_y \rho S V^2$$

$$Z = \frac{1}{2} c_z \rho S V^2$$

Будем считать, что:  $I_{x1}, I_{y1}, I_{z1} = f_i(t)$  - известные функции времени.  
 $\rho = \rho(y_0)$

Если закон изменения массы не задан, то к системе добавляется уравнение:

$$19.) \frac{dm}{dt} = -Q \quad \text{- секундный массовый расход. Зависит от типа двигателя, режима работы, высоты полета.}$$

$$m = m_0 - Q t$$

(1-3) – описывает поступательное движение вместе с центром тяжести.

(4-6) – описывает вращательное движение относительно центра тяжести.

(1-3) - можно записать в проекциях на связанные оси:

$$1.)' \quad m \frac{dV_{x1}}{dt} = R_{x1} - G \sin \vartheta - X + Y\alpha + Z\beta;$$

$$2.)' \quad m \left\{ \frac{dV_{y1}}{dt} + \omega_{z1} V_{y1} \right\} = R_{y1} - G \cos \gamma \cos \vartheta + X\alpha + Y;$$

$$3.)' \quad m \left\{ \frac{dV_{z1}}{dt} - \omega_{y1} V_{x1} \right\} = R_{z1} + G \sin \gamma \cos \vartheta - X\beta - Z;$$

причем  $V_{x1} \approx V_1$ ;  $V_{y1} \approx -V\alpha$ ;  $V_{z1} \approx V\beta$ .

(7-12) – кинематические соотношения: причем (7-9) описывают закон изменения эйлеровых углов (крена, тангажа, атаки); (10-12) описывают закон изменения координат центра тяжести в стартовой с. к.

(13-15) – геометрические соотношения, показывающие связь между углами, ориентирующими объект в различных координатных системах.

**Характеристика системы:**

Система нелинейная.

Общий вид линейной системы:  $\frac{dy}{dt} = A(t)y + F$ , где  $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ ;

$$A = \{a_{ik}\}, \quad k = 1 \dots n.$$

**Способы упрощения:**

Разделение продольного движения ЛА на продольное и боковое.

Система управления движения существенно упрощается, если удастся разделить её на две подсистемы меньшего порядка, чем исходная.

С. у. продольного движения описывает движение ЛА в вертикальной плоскости.

С. у. бокового движения описывает движение ЛА в горизонтальной плоскости и движение крена (боковое).

Принципиальная возможность такого разделения обусловлена наличием симметрии ЛА относительно продольной плоскости  $x_1y_1$ .

Разрешение возможно при следующих условиях:

- 1.) боковое движение обладает малой интенсивностью:  
 $\beta, \gamma_c, \Psi, \psi, \gamma, \omega_x, \omega_y, \delta_B, \delta_H, z_0$  - малые величины.
  - 2.) Коэффициент лобового сопротивления  $c_x$  является функцией параметров продольного движения и не зависит от параметров бокового движения:  $c_x(H, \alpha, \delta_B)$ .
- $\cos \gamma_c \approx 1; \quad \sin \gamma_c \approx \gamma_c; \quad \sin \alpha \approx \alpha; \quad \sin \beta \approx \beta.$

## §9. Режимы полета.

### Балансировочный режим.

Это режим прямолинейного установившегося полета на постоянной высоте.

Будем рассматривать этот полет в плоскости  $x_0y_0$ .

Параметры балансирующего режима:

$$y_0 = const, \quad \Theta = 0.$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d\Theta}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_{z1} = \frac{d\omega_{z1}}{dt} = 0.$$

Режим стационарный.

Боковая сила отсутствует, т. к. движение происходит в вертикальной плоскости.

$$R = R(y_0) = const$$

$$G = mg; \quad \rho = \rho(y_0) = const$$

$$X = \frac{1}{2} c_x \rho S V^2 \quad c_x = c_x(M, \alpha, \beta, \delta_B, \delta_H, \delta_\varepsilon)$$

$$Y = \frac{1}{2} c_y \rho S V^2 \quad c_y = c_y(M, \alpha, \delta_B)$$

$$M_{AZ1} = \frac{1}{2} m_{z1} \rho S V^2 l_3 \quad m_{z1} = m_{z10} + m_{z1\alpha}^\alpha + m_{z1\delta_B}^{\delta_B}$$

т. к.  $\omega_z = 0$ , то тушащего момента не будет, и момент от запаздывающего скоса также отсутствует.

$\omega_{z1}^\alpha$  - коэффициент статической устойчивости. Статическая устойчивость означает, что когда возникает угол атаки, то возникает момент, который старается уменьшить его по абсолютной величине.

Запишем уравнения, описывающие этот режим. Обратимся к системе 2 и подставим в неё условия этого режима.

$$\tau: \quad 0 = R \cos \alpha - X \quad (1) \text{ - уравнение в проекции на касательную.}$$

$$\cos \alpha \approx 1 \text{ - т. к. это малый угол.}$$

$$n: \quad 0 = R \sin \alpha + Y - G \quad (2)$$



$$0 = M_{RZ1} + M_{AZ1} \quad (3)$$

$$\vartheta = \alpha \quad (4) \quad y_0 = const \quad (5) \quad \frac{dx_0}{dt} = V \quad (6)$$

Определим параметры:  $0 = R - \frac{1}{2} c_x \rho S V^2$ . Будем учитывать  $c_x$  только от Маха.

$M = \frac{V}{a}$  - скорость распространения малых возмущений в среде равна скорости звука.

Отсюда можно найти  $V_{бал}$ . Решаем: ] в (1.) правая часть равна  $F(V)$ .

Обратимся ко (2.) уравнению:  $0 = R\alpha + \frac{1}{2} c_Y^\alpha \alpha \rho S V^2 - mg$ .

$$\alpha_{бал} = \frac{mg}{R + \frac{1}{2} c_Y^\alpha \rho S V^2}.$$

Теперь обратимся к уравнению (3.):  $0 = M_{RZ1} + \frac{1}{2} (m_{Z10} + m_{Z1}^\alpha \alpha + m_{Z1}^{\delta B} \delta_B) \rho S V^2 l$

отсюда мы определим  $\delta_{B бал}$ .

$m_{Z1}^\alpha \alpha + m_{Z1}^{\delta B} \delta_B = 0$  - балансировочное соотношение. Это соотношение часто используется вместо уравнения моментов, в котором пренебрегают инерционным и тушащим моментом. Оно позволяет уменьшить порядок системы.

$$\delta_{B Бал} = -\alpha_{бал} \frac{m_{Z1}^\alpha}{m_{Z1}^{\delta B}}.$$

Запишем балансировочное соотношение, разрешив его относительно  $\alpha$ :

$$\alpha = -\delta_B \frac{m_{Z1}^{\delta B}}{m_{Z1}^\alpha} \Rightarrow \text{если статическая устойчивость большая } m_{Z1}, \text{ то будет маленький } \alpha.$$

А в свою очередь большая статическая устойчивость приводит к плохой управляемости.

### Произвольный разворот в вертикальной плоскости.

Параметры этого режима изменяются в зависимости от высоты полета, т. е. являются нестационарными.

Для нахождения параметров этого режима обратимся к системе управления продольного движения 2.

$$1.) \quad m \frac{dV}{dt} = R - G \sin \Theta - \frac{1}{2} c_x \rho S V^2$$

$$2.) \quad mV \frac{d\Theta}{dt} = R\alpha - G \cos \Theta + \frac{1}{2} c_Y^\alpha \alpha \rho S V^2$$

$$3.) \quad I_{Z1} \frac{d\omega_{Z1}}{dt} = M_{RZ1} + \frac{1}{2} \left( m_{Z10} + m_{Z1}^\alpha \alpha + m_{Z1}^{\delta B} \delta_B + m_{Z1}^{\omega 1} \frac{\omega_{Z1} l}{V} \right) \rho S V^2 l$$

$$4.) \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_{Z1}$$

$$5.) \quad \vartheta = \Theta + \alpha$$

$$6.) \quad \frac{dx_0}{dt} = V \cos \Theta \quad \begin{array}{l} R = R(y_0) \\ \rho = \rho(y_0) \end{array}$$

$$7.) \frac{dy_0}{dt} = V \sin \Theta$$

Существует две постановки задачи определения параметров движения:

1. Задан закон изменения угла возвышения:  $\Theta = \Theta_{np}(t)$ .

Найти  $\alpha_{np}, \delta_{B np}, V_{np} \dots$

Решение: подставим во все уравнения заданный закон возвышения. Тогда, решая задачу численным интегрированием, найдем все параметры.

Решение задачи можно упростить:

Рассмотрим (1) и (7). В (1) считаем, что  $c_x$  зависит только от Маха. Находим  $V_{np}$  и  $y_{0 np}$ , численно интегрируя (1) и (7).

Обратимся к (2), откуда находим  $\alpha_{np}$ , решая простое алгебраическое уравнение:

$$\alpha_{np} = \frac{mV \frac{d\Theta_{np}}{dt} + G \cos \Theta_{np}}{R + \frac{1}{2} c_Y^\alpha \rho S V^2}$$

обратимся к (3). Заменяем балансирующее соотношение, пренебрегая инерционным и тушащим моментом.  $m_{Z1}^\alpha \alpha + m_{Z1}^{\delta B} \delta_B = 0 \Rightarrow \delta_{B np} = -\alpha_{np} \frac{m_{Z1}^\alpha}{m_{Z1}^{\delta B}}$ .

После нахождения оставшихся величин расчет можно уточнить повторив вычисления с учетом  $c_x(M, \alpha_{np})$ .

2. Задан закон изменения угла тангажа:  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{np}(t)$ .

Найти  $\alpha_{np}, \delta_{B np}, V_{np} \dots$

Подставим во все уравнения заданный закон изменения угла тангажа. Тогда, решая задачу численным интегрированием, найдем все параметры.

Возможные упрощения:

$$\cos \Theta = \cos \mathcal{G}_{np}(t)$$

$$\sin \Theta = \sin \mathcal{G}_{np}(t)$$

из (1) и (7) находим  $V_{np}$  и  $y_{0 np}$

$$\text{из (2): } mV \left( \frac{d\mathcal{G}_{np}(t)}{dt} - \frac{d\alpha}{dt} \right) = R\alpha - G \cos \mathcal{G}_{np}(t) + \frac{1}{2} c_Y^\alpha \alpha \rho S V^2.$$

$$\frac{d\alpha}{dt} + P(t)\alpha = Q(t).$$

Далее по аналогии.

## §10. Учет влияния ветра в задачах динамики ЛА.

Учет влияния ветра можно произвести двумя способами:

- 1.) основан на рассмотрении абсолютного движения ЛА по отношению к Земле.
- 2.) Основан на рассмотрении относительного движения ЛА

При наличии ветра вектор скорости центра масс ЛА  $\bar{V}$  можно представить:

$$\bar{V} = \bar{V}_r + \bar{W}$$

$\bar{W}$  - скорость ветра относительно Земли

$\bar{V}$  - скорость ЛА – путевая скорость.

$\bar{V}_r$  - скорость ЛА относительно ветра – воздушная скорость.

Рассмотрим первый способ:

Основная идея учета ветра в том, что аэродинамические силы и моменты определяются величиной и ориентацией вектора воздушной скорости.

Задаем вертикальную и горизонтальную составляющие:  $\bar{W} = W_{x0}\bar{i}_0 + W_{y0}\bar{j}_0$ .

$x_1y_1$ - плоскость симметрии.

$\bar{X}$  - направлена против воздушной скорости.

$\bar{Y}$  - перпендикулярно.

Запишем силы и моменты:

$$X = \frac{1}{2} C_X \rho S V_r^2$$

$$C_X = C_X(M_r, \alpha_r)$$

$$M_r = \frac{V_r}{a}$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{2} C_Y \rho S V_r^2$$

$$C_Y = C_Y(M_r, \alpha_r)$$

$$\text{Момент тангажа: } M_{AZ1} = \frac{1}{2} m_{Z1} \rho S V_r^2$$

Коэффициент аэродинамического момента в линейной аппроксимации:

$$m_{Z1} = m_{Z10} + m_{Z1}^{\alpha} \alpha_r + m_{Z1}^{\delta_B} \delta_B + m_{Z1}^{\omega_{Z1}} \frac{\omega_{Z1} l}{V_r} + m_{Z1}^{\dot{\alpha}_r} \frac{\dot{\alpha}_r l}{V_r}$$

Запишем уравнение движения:  $m \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{R} + \bar{G} + \bar{X} + \bar{Y}$  ур. в вертикальной плоскости.

$$\text{Уравнения моментов: } I_{Z1} \frac{d\omega_{Z1}}{dt} = M_{RZ1} + M_{AZ1}.$$

Спроектируем на оси  $x^*$  и  $y^*$  сопровождающего трехгранника:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau: m \frac{dV}{dt} = R \cos \alpha - X \cos \nu + Y \sin \nu + G \sin \Theta \\ n: mV \frac{d\Theta}{dt} = R \sin \alpha + X \sin \nu + Y \cos \nu - G \cos \Theta \\ I_{Z1} \frac{d\omega_{Z1}}{dt} = M_{RZ1} + \frac{1}{2} m_{Z1} \rho S V_r^2 l \end{array} \right.$$

$$\cos \nu \approx 1 \quad \cos \alpha \approx 1$$

$$\sin \nu \approx \nu \quad \sin \alpha \approx \alpha$$

Найдем  $\alpha_r$  и  $V_r$ .

$$\nu = \alpha_r - \alpha$$

$$\bar{V}_r = \bar{V} - \bar{W} = \bar{V} - (W_{x0}\bar{i}_0 + W_{y0}\bar{j}_0)$$

Спроектируем данное выражение на оси  $x_1$  и  $y_1$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_r \cos \alpha_r = V \cos \alpha - (W_{x0} \cos \mathcal{G} + W_{y0} \sin \mathcal{G}) \\ -V_r \sin \alpha_r = -V \sin \alpha - (-W_{x0} \sin \mathcal{G} + W_{y0} \cos \mathcal{G}) \end{array} \right.$$

$$V_r^2 = (V \cos \alpha - W_{x0} \cos \vartheta - W_{y0} \sin \vartheta)^2 + (-V \sin \alpha + W_{x0} \sin \vartheta - W_{y0} \cos \vartheta)^2$$

$$\sin \alpha_r \approx \alpha_r; \quad \sin \alpha \approx \alpha; \quad \cos \alpha \approx 1; \quad V_r \approx V.$$

$$\alpha_r = \alpha - \frac{W_{x0} \sin \vartheta}{V} + \frac{W_{y0} \cos \vartheta}{V};$$

$$\nu = \alpha_r - \alpha = \frac{W_{y0} \cos \vartheta}{V} - \frac{W_{x0} \sin \vartheta}{V}.$$

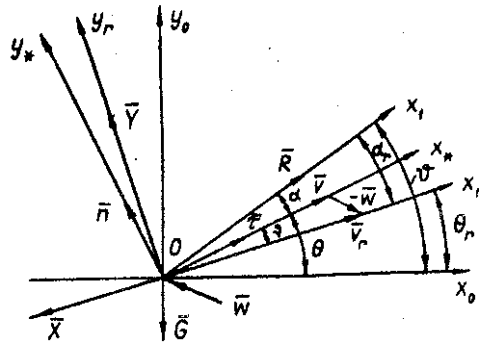


рис.1.10.1

Уравнения динамики продольного движения ЛА:

$$1.) \quad m \frac{dV}{dt} = R - \frac{1}{2} C_x \rho S V^2 - G \sin \Theta;$$

$$2.) \quad mV \frac{d\Theta}{dt} = R \alpha - G \cos \Theta + \frac{1}{2} C_x \rho S V^2 \nu + \frac{1}{2} C_y^\alpha (\alpha + \nu) \rho S V^2;$$

$$3.) \quad I_{z1} \frac{d\omega_{z1}}{dt} = M_{Rz1} + \frac{1}{2} \rho S V^2 (m_{z10} + m_{z1}^\alpha (\alpha + \nu) + m_{z1}^{\delta_B} \delta_B + m_{z1}^{\omega_{z1}} \frac{\omega_{z1} l}{V});$$

$$4.) \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_{z1};$$

$$5.) \quad \frac{dx_0}{dt} = V \cos \Theta;$$

$$6.) \quad \frac{dy_0}{dt} = V \sin \Theta;$$

$$7.) \quad \vartheta = \Theta + \alpha.$$

## 2. Математическая модель движения в воде.

Рассмотрим жесткий ЛА с переменной массой. Вода несжимаема.

При описании движения в воде в число действующих сил стоит включить силу Архимеда, приложенную в метацентре и гидродинамические реакции.

Если тело движется равномерно и прямолинейно, то гидродинамические реакции можно определить через аэродинамические коэффициенты.

### §1. Движение жидкости, вызванное телом, двигающимся с любой переменной скоростью.

Рассмотрим тело,двигающееся в неограниченной, невязкой и несжимаемой жидкости - идеальной.

Известно, что движение жидкости, которое возникает в начальный момент времени от движения тела, будет потенциальным. А т. к. жидкость идеальная и несжимаемая, а массовые силы консервативны, то оно будет потенциальным все время(теорема Лагранжа).

Для нахождения потенциальной скорости абсолютного движения жидкости необходимо решить задачу Неймана.

$$\Delta\varphi = 0 \quad (1).$$

$$V_n^{жид} \Big|_S = V_n^{тел} \quad (2).$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}$$

Задача Неймана состоит в том, чтобы найти  $\varphi = \varphi(t, x_1, y_1, z_1)$  - потенциальные скорости неустановившегося движения жидкости.

$$\vec{V}_i^T = \vec{U} + \vec{\omega} + \vec{r}_i$$

Решение задачи можно искать в виде:

$$p(t, x_1, y_1, z_1) = \sum_{\sigma=1}^6 u_{\sigma} \varphi_{\sigma} \quad (3).$$

$$u_{\sigma}(t)$$

$$\varphi_{\sigma}(x_1, y_1, z_1)$$

$\varphi_{\sigma}$  - функция, определяемая формой поверхности  $S$  и выбором системы координат.

Если (3)  $\rightarrow$  (1), (2), (2)', то можно показать, что функция  $\varphi_{\sigma}$  удовлетворяет уравнению Лапласа.

$$\Delta\varphi_{\sigma} = 0 \quad (4)., \text{ а граничные условия,}$$

$$\frac{\partial\varphi_{\sigma}}{\partial n} \Big|_S = \alpha_{\sigma} \quad (4)'$$

Установим физический смысл  $\varphi_{\sigma}$  :

Обратимся к (3):

$$u_1 = u_{x1}; \quad u_2 = u_{y1}; \quad u_3 = u_{z1}; \quad u_4 = \omega_{x1}; \quad u_5 = \omega_{y1}; \quad u_6 = \omega_{z1}.$$

Если все  $u_i |_{i \neq 1} = 0$ , а  $u_1 = 1$ , то мы полагаем, что  $\varphi = \varphi_1$ .

Вывод:

$\varphi_1$  - это потенциал скорости такого движения жидкости, которое соответствует поступательному движению тела жидкости в направлении оси  $x_1$  с единичной скоростью.

Аналогично определяется физический смысл  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$ .

## §2. Определение гидродинамических реакций.

$\bar{P}$  - суммарная гидродинамическая сила.

$$\bar{P} = - \iint_S \rho \bar{n} dS$$

$\bar{L}_{01}$  - результирующий гидродинамический момент

$$\bar{L}_{01} = - \iint_S p \bar{\rho}_i \bar{n} dS \quad (5).$$

$p$  - давление на поверхности тела.

Т. к. жидкость идеальна и несжимаема, массовые силы консервативны, движение жидкости потенциально, то давление на поверхности тела имеет вид:

$$p = p_0 - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\rho V^2}{2} \quad (6). \quad \text{где } \rho - \text{массовая плотность жидкости,}$$

$p_0$  - давление на бесконечности.

(6)  $\rightarrow$  (5) и получаем возможность для вычисления. Но на практике определение этого затруднительно, т. к.  $p$  переменное.

Если применить законы механики к этой массе жидкости, можно получить выражение

для гидродинамической реакции:  $\bar{P} = \frac{d}{dt} \iint_S \rho \varphi \bar{n} dS.$

$$\bar{L}_{01} = \frac{d}{dt} \iint_S \rho \bar{\rho}_i \times \bar{n} \varphi dS \quad (7).$$

Запишем векторное уравнение движения тела в жидкости:

$\bar{k}^*$  - количество движения тела;

$\bar{L}_{01}^*$  - момент количества движения тела относительно  $O_1$  (кинетический момент тела).

$\bar{F}$  - главный вектор;

$\bar{M}_{01}$  - главный момент.

$$\frac{d\bar{k}^*}{dt} = \bar{P} + \bar{F}$$

$$\frac{d\bar{L}_{01}^*}{dt} = \bar{M}_{01} + \bar{L}_{01}$$

Подставим:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \bar{k}^* - \iint_S \rho \varphi \bar{n} dS \right) &= \bar{F} \\ \frac{d}{dt} \left( \bar{L}_{01}^* - \iint_S \rho \bar{\rho}_i \times \bar{n} \varphi dS \right) &= \bar{M} \end{aligned} \right. \quad (8).$$

Если бы тело двигалось в пустоте, то мы бы получили

$$\begin{cases} \frac{d\bar{k}^*}{dt} = \bar{F} \\ \frac{d\bar{L}_{01}^*}{dt} = \bar{M}_{01} \end{cases} \quad (8').$$

Сравнивая две эти системы, приходим к выводу, что неустановившееся движение тела в жидкости происходит так, будто к главному вектору количества движения присоединяется добавочное количество движения:  $\bar{B} = -\rho \iint_S \varphi \bar{n} dS$  (9).

А к главному моменту количества движения присоединяется:  $\bar{I} = -\rho \iint_S \bar{\rho} \times \bar{n} \varphi dS$  (10).

Эти векторы получили название:  $\bar{B}$  - импульсивная сила;  
 $\bar{I}$  - импульсивная пара.

Если ввести эти обозначения, то (8) примет вид:  $\frac{d}{dt}(\bar{k}^* + \bar{B}) = \bar{F}$ .  
 $\frac{d}{dt}(\bar{L}_{01}^* + \bar{I}) = \bar{M}$ .

Выразим  $\varphi$  из (3) и подставим его в(9) и(10).

$$\bar{B} = \sum_{\sigma=1}^6 u_{\sigma} \left( -\rho \iint_S \varphi_{\sigma} \bar{n} dS \right)$$

$$\bar{I} = \sum_{\sigma=1}^6 u_{\sigma} \left( -\rho \iint_S \bar{\rho}_i \times \bar{n} \varphi_{\sigma} dS \right)$$

т. к.  $\varphi_{\sigma}$  зависит только от координат точек жидкости, то эти выражения представляют собой векторы. Разложим эти векторы по осям:

$$\bar{n} = \bar{i}_1 \alpha_1 + \bar{j}_1 \alpha_2 + \bar{k}_1 \alpha_3$$

$$\bar{B} = B_{1\sigma} \bar{i}_1 + B_{2\sigma} \bar{j}_1 + B_{3\sigma} \bar{k}_1$$

$$B_{1\sigma} = -\rho \iint_S \varphi_{\sigma} \alpha_1 dS; \quad B_{2\sigma} = -\rho \iint_S \varphi_{\sigma} \alpha_2 dS; \quad B_{3\sigma} = -\rho \iint_S \varphi_{\sigma} \alpha_3 dS \Rightarrow B_{i\sigma} = -\rho \iint_S \varphi_{\sigma} \alpha_i dS.$$

$$-\rho \iint_S \varphi_{\sigma} \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS \quad \left( \alpha_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \Big|_S \right)$$

$$\bar{B} = \sum_{\sigma=1}^3 u_{\sigma} \bar{B}_{\sigma}$$

$$\bar{P} = -\frac{d\bar{B}}{dt} = -\sum_{\sigma=1}^6 \frac{du_{\sigma}}{dt} \bar{B}_{\sigma} - \sum_{\sigma=1}^6 u_{\sigma} \bar{\omega} \times \bar{B}_{\sigma} \quad (11).$$

$$\bar{L}_{01} = -\frac{d\bar{I}}{dt}$$

$$\bar{L}_0 = \bar{L}_{01} - \bar{\rho}_0 \times \bar{P} = -\sum_{\sigma=1}^6 \frac{du_{\sigma}}{dt} \bar{I}_{\sigma} - \sum_{\sigma=1}^6 u_{\sigma} (u \bar{B}_{\sigma} + \omega \bar{I}_{\sigma}) \quad (12).$$

$$\bar{B}_{\sigma} = B_{1\sigma} \bar{i}_1 + B_{2\sigma} \bar{j}_1 + B_{3\sigma} \bar{k}_1$$

$$\bar{I}_{\sigma} = B_{4\sigma} \bar{i}_1 + B_{5\sigma} \bar{j}_1 + B_{6\sigma} \bar{k}_1$$

$$B_{i\sigma} = \rho \lambda_{i\sigma}$$

$$\lambda_{i\sigma} = -\iint_S \frac{d\varphi_i}{dn} \varphi_{\sigma} dS = -\iint_S \alpha_i \varphi_{\sigma} dS \quad (13).$$

$\lambda_{ij}$  - коэффициенты присоединенных масс.

### §3. Коэффициенты присоединенных масс.

Всего 36 коэффициентов. Они зависят лишь от формы тела. При этом матрица этих коэффициентов симметричная  $\lambda_{i\sigma} = \lambda_{\sigma i}$ , т. о. Различных всего 21 причем часть из них считается нулевыми, что является следствием соотношений, имеющих место для потенциалов скоростей  $\varphi_\sigma$  и их нормальных производных  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial n}$  в симметричных точках.

Если тело имеет одну плоскость симметрии, то имеется  $12 \neq 0$  и  $9=0$ .

Если тело имеет ось симметрии  $x_1$ , то отличные от нуля 7 коэффициентов:

$$\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}, \lambda_{55}, \lambda_{66}, \lambda_{26}, \lambda_{35}.$$

при этом:  $\lambda_{22} = \lambda_{33}$

$$\lambda_{55} = -\lambda_{66}$$

$$\lambda_{26} = -\lambda_{35}$$

Теоретические формулы для  $\lambda_{i\sigma}$  существуют только для ограниченного количества тел. Характерным примером таких тел является эллипсоид, с осями  $a \geq b \geq c$ .

$$\lambda_{11} = \pi r^2 l$$

$$m_{np} = \rho \lambda_{11}$$

$$(m + m_{np}) \frac{dV}{dt} = R$$

Если шар, то:

$$\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{33} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$

В общем случае для произвольных тел  $\lambda_{i\sigma}$  определяется экспериментально.

Запишем выражение для гидродинамических реакций в случае движения БР в вертикальной плоскости  $x_0 y_0$  с которой совпадает плоскость симметрии  $x_1 y_1$  т.е. в случае продольного движения.  $P_{x1}, P_{y1}, L_{0z}$ .

В этом случае:  $u_1 = u_{x1}; u_2 = u_{y1}; u_6 = \omega_{z1}; u_3 = u_4 = u_5 = 0$  - движение плоское.

$$\begin{matrix} \lambda_{11} & \lambda_{22} \\ \lambda_{66} & \lambda_{26} \end{matrix} \text{ - для плоского движения.}$$

$$\begin{aligned} P_{x1} = n_0(11) &= -\sum_{\sigma=1}^6 \frac{du_\sigma}{dt} B_{1\sigma} - \sum_{\sigma=1}^6 u_\sigma (\omega_{y1} B_{3\sigma} - \omega_{z1} B_{2\sigma}) = -\frac{du_{x1}}{dt} B_{11} + u_{y1} B_{32} \omega_{z1} + \omega_{z1}^2 B_{26} = \\ &= -B_{11} \frac{du_{x1}}{dt} = -\rho \lambda_{11} \frac{du_{x1}}{dt}; \end{aligned}$$

Т. к. движение плоское, то  $\omega_{y1}$  нет.

$$u_{y1} \approx V_{y1} \approx -V\alpha$$



$$\begin{aligned}
P_{y1} &= -\sum_{\sigma=1}^6 \frac{du_{\sigma}}{dt} B_{2\sigma} - \sum_{\sigma=1dt}^6 u_{\sigma} (\omega_{z1} B_{1\sigma} - \omega_{x1} B_{3\sigma}) = -\frac{du_{y1}}{dt} B_{22} - \frac{d\omega_{z1}}{dt} B_{26} - u_{x1} \omega_{z1} B_{11} = \\
&= -\rho \lambda_{22} \frac{du_{y1}}{dt} - \rho \lambda_{26} \frac{d\omega_{z1}}{dt} - \rho \lambda_{11} \omega_{z1} u_{x1}. \\
L_{0z1} &= -\sum_{\sigma=1}^6 \frac{du_{\sigma}}{dt} B_{6\sigma} - \sum_{\sigma=1dt}^6 u_{\sigma} (u_{x1} B_{2\sigma} - u_{y1} B_{1\sigma} + \omega_{x1} B_{5\sigma} - \omega_{y1} B_{4\sigma}) = \\
&= \rho \left( -\lambda_{66} \frac{d\omega_{z1}}{dt} - \lambda_{26} \frac{du_{y1}}{dt} - \lambda_{22} u_{y1} u_{x1} - \lambda_{26} \omega_{z1} u_{y1} + \lambda_{11} u_{y1} u_{x1} \right).
\end{aligned}$$

Полученные гидродинамические силы и момент не учитывают влияние трения и вихреобразования, т. к. жидкость идеальная и движение её потенциальное.

Предлагается следующий способ учета сил трения и вихреобразования.

Записав аэродинамические силы и моменты и определив аэродинамические коэффициенты опытным путем добавляем к этим силам и моментам те слагаемые и формулы (4), которые не учитываются.

В воздухе было:

$$F_{Ax1} = -X; \quad F_{Ay1} = X\alpha + Y; \quad F_{Az1} = -X\beta - Z.$$

$$\text{где: } X = \frac{1}{2} C_x \rho S V^2 \quad Y = \frac{1}{2} C_y \rho S V^2 \quad Z = \frac{1}{2} C_z \rho S V^2.$$

В воде будет:

$$P_{Ax1} = -X - \rho \lambda_{11} \frac{du_{x1}}{dt}$$

$$P_{Ay1} = X\alpha + Y - \rho \lambda_{22} \frac{du_{y1}}{dt} - \rho \lambda_{26} \frac{d\omega_{z1}}{dt} - \rho \lambda_{11} u_{x1} \omega_{z1}$$

$$M_{Az1} = \frac{1}{2} m_{z1} \rho S V^2 l - \rho \lambda_{26} \frac{du_{y1}}{dt} - \rho \lambda_{66} \frac{d\omega_{z1}}{dt}$$

Кроме того, надо учитывать силу Архимеда, приложенную в метацентре ЛА.

$$\bar{G}_A = \bar{G}_A \cdot \bar{j}_0$$

$$\bar{G} = \bar{G} \cdot \bar{j}_0$$

$$G_1 = G - G_A$$

$$\bar{G}_1 = -\bar{G}_1 \cdot \bar{j}_0$$

$\bar{r}_A = x_{1A} \cdot \bar{i}_1$  где  $x_{1A}$  - расстояние между центром тяжести и метацентром.

$$\bar{M}_0(\bar{G}_A) = \bar{r}_A \cdot \bar{G}_A$$

$$\bar{M}_0(\bar{G}_A) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_{1A} & 0 & 0 \\ G_{Ax1} & G_{Ay1} & 0 \end{vmatrix} = -x_{1A} (\bar{j} G_{Ax1} - \bar{k} G_{Ay1}) = x_{1A} G_{Ay1} \bar{k}.$$

$$x: \quad (m + \rho \lambda_{11}) \frac{dV_{x1}}{dt} = R_{x1} - G_1 \sin \vartheta - X$$

$$y: \quad (m + \rho \lambda_{22}) \frac{dV_{y1}}{dt} + (m + \rho \lambda_{11}) \omega_{z1} V_{x1} = R_{y1} - G_1 \cos \vartheta + X\alpha + Y$$

$$(I_{z1} + \rho \lambda_{66}) \frac{d\omega_{z1}}{dt} = M_{Rz1} = \frac{1}{2} m_{z1} \rho S V^2 l - \rho \lambda_{26} \frac{dV_{y1}}{dt} + G_A x_{1A} \cos \vartheta$$

### 3. Учет влияния подвижности жидкого наполнения в задачах динамики ЛА.

#### §1. Учет колебаний жидкого наполнения в уравнениях движения ЛА.

При решении этой задачи представляет интерес определение дополнительных сил и моментов, которые действуют на ракету со стороны колеблющейся жидкости. Также интересует проблема устойчивости невозмущенного движения механической системы, которая имеет дополнительную степень свободы, обусловленную движением жидкости в баках.

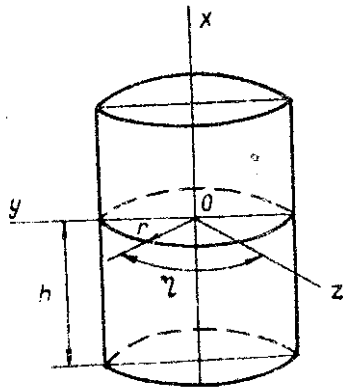


рис.3.1.1.

Принимают допущения, аналогичные предыдущим.

В предположении малости отклонений свободной поверхности жидкости от вертикали для этого потенциала можно записать уравнение Лапласа  $\Delta\varphi=0$  и поставлена задача Немана, но граничные условия выступают на стенках бака и на свободной поверхности жидкости.

Решение основано на методе механических аналогов колебания жидкости в баках.

Параметры аналога выбираются так, чтобы силы и моменты, действующие на ракету со стороны колеблющейся жидкости, были одинаковы.

Они зависят от формы бака, характера переносного движения ракеты, свойств жидкости.

Колебательный процесс равен суперпозиции токов колебаний с разной частотой. Исследования показывают, что масса жидкости, участвующая в колебании первого тока в 30 раз меньше, чем второго.  $\Rightarrow$  можно учитывать один аналог. Этот аналог указывает, что не вся масса жидкости участвует в колебании. При этом аналог этот приводится к идеальной несжимаемой жидкости, а содержащий её бак не имеет перегородок.

Пример:

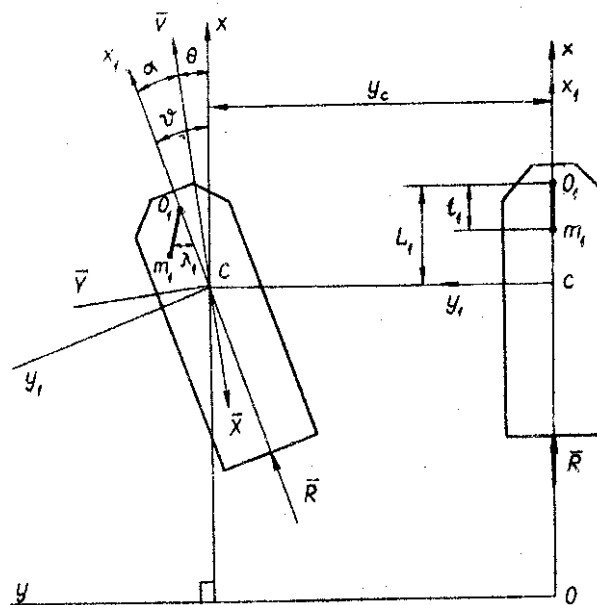


рис.3.1.2.

Мат. маятник, точка подвеса которого раскладывается на оси бака и считается, что его поверхность мало отклоняется от вертикали.

Силы и моменты, действующие на ракету со стороны жидкости действуют через точку подвеса маятника.

Составим уравнение движения ракеты при учете колебаний в одном баке.

$$\bar{W}_0 = a_{x1} \bar{i}_1 + a_{y1} \bar{j}_1$$

$$\bar{W}_{01} = \bar{W}_0 + l_1^\times \ddot{\vartheta} \cdot \bar{j}_1 - l_1^\times \dot{\vartheta} \cdot \dot{\bar{i}}_1$$

$$\dot{\lambda}_1 + \omega_{\lambda 1}^2 \lambda_1 = \frac{1}{L_1} \dot{V}_{y1} + \frac{1}{L_1} (l_1^\times - L_1) \dot{\vartheta} + \frac{1}{L_1} V_{x1} \dot{\vartheta}, \quad \text{- ур-е колебательного движения маятника.}$$

где  $\omega_{\lambda 1}^2 = \dot{V}_{x1}$  - собственная частота свободных колебаний жидкости первого тона в баке.

$$F_H = m_1 \dot{V}_{x1} \quad \text{- сила натяжения.}$$

Запишем дополнительные силы, которые должны быть учтены в уравнениях поступательного движения.

$$F_{Hx1} = -F_H \cos \lambda_1 \approx -F_H$$

$$F_{Hy1} = -F_H \sin \lambda_1 \approx -F_H \cdot \lambda_1$$

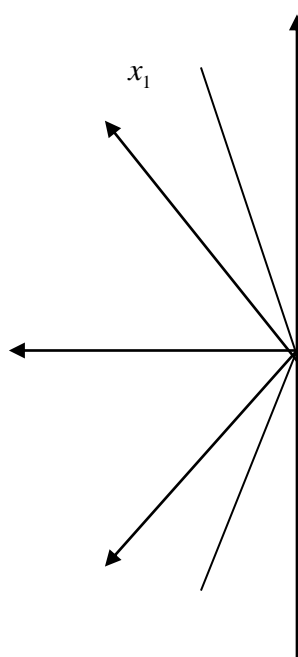
$$M_{z1ж} = -m_1 \dot{V}_{x1} l_1^\times \lambda_1 \quad \text{- момент, входящий в уравнения вращательного движения.}$$

Момент инерции неподвижной части жидкости, используя формулу Штейнера, добавить к моменту инерции ракеты без топлива относительно оси  $z_1$ :

$$I_{z1ж} = I_0 + m_0 l_2^2; \quad l_2 = l_1^\times - l_1 - l_0.$$

## §2. Уравнение плоского движения.

Будем рассматривать движение в вертикальной плоскости ЛА. В этом случае силовое воздействие колеблющейся жидкости на ЛА проявляется в силе натяжения маятника, передаваемой на точку подвеса.



$y_0$  Уравнения движения ЛА в связанной системе:

$$m \frac{dV_{x1}}{dt} = R - G \cos \vartheta - X \cos \alpha + Y \sin \alpha - m_1 \frac{dV_{x1}}{dt}$$

$$m \left( \frac{dV_{y1}}{dt} + V_{x1} \omega_{z1} \right) = G \sin \vartheta + Y \cos \alpha + X \sin \alpha - m_1 \lambda_1 \frac{dV_{x1}}{dt}$$

$$\begin{aligned} (I_{z1} + I_{z1ж}) \frac{d\omega_{z1}}{dt} = M_{RZ} + \frac{1}{2} m_{z1} \rho S V^2 l - \\ - m_1 l_1^\times \lambda_1 \frac{dV_{x1}}{dt} \end{aligned}$$

$$\vartheta = \Theta + \alpha$$

$$\frac{dx_0}{dt} = V \sin \Theta; \quad \frac{dy_0}{dt} = V \cos \Theta;$$

$$\sin \alpha \approx \alpha; \quad \cos \alpha \approx 1.$$

$$\delta_B = \delta_B(\vartheta, \omega_{z1}, \dots)$$

В этой системе:  $m = m_K + m_0$  - масса корпуса и неподвижной части жидкости.

$I_{z1}$  - момент инерции ракеты без топлива, но с маятниками в положении равновесия.

## 4. Упругие колебания корпуса.

### §1. Учет влияния упругих колебаний корпуса в уравнениях движения.

Физическая сущность взаимодействия упругих колебаний корпуса с системой управления заключается в следующем:

Гироскопы, измеряющие угловую ориентацию ракеты, реагируют на возникающие в полете угловые ускорения так же, как и на колебания корпуса как твердого тела. В результате возникающей дополнительной обратной связи колебания в системе угловой стабилизации оказываются взаимосвязанными с упругими колебаниями. Если частота среза системы стабилизации и частота упругих колебаний близки друг к другу, то может возникнуть явление резонанса. Плюс ко всему упругие колебания обуславливают появление дополнительных аэродинамических нагрузок, появляются лишние углы атаки, которые вызывают дополнительные, упругие деформации (явление Платтера).

Учет влияния поперечных, упругих колебаний следует учитывать, когда  $\frac{l}{d} > 4$ .

Корпус ракеты схематически представляется в виде тонкостенной балки.

$m(x)$ - погонная масса.

$IE(x)$ - изгибная жесткость.

$I$  - момент инерции площадки поперечного сечения относительно оси перпендикулярной плоскости колебаний и проходящей через центр тяжести балки

$E$  - модуль Юнга.

$q(x, t)$  - погонная нагрузка.

$y(x, t)$  известна

Запишем уравнение продольного движения ракеты с учетом упругих колебаний.

Будем пренебрегать дополнительными аэродинамическими силами, которые возникают вследствие упругости корпуса.

Пренебрегаем составляющей силы тяжести в направлении перпендикулярном продольной оси ракеты.

Следовательно, влияние упругости корпуса на динамику проявляется лишь в том, что вектор тяги  $\bar{R}$  получает дополнительное угловое отклонение, равное углу наклона упругой линии в точке подвеса двигателя. А сама точка подвеса смещается от центра оси жесткого Лана величину прогиба:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left( \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_1} \approx \varphi$$

$$\cos \varphi \approx 1; \quad \sin \varphi \approx \varphi.$$

$$R_x = R \cos \varphi \approx R$$

$$R_y = R \sin \varphi \approx \varphi R \approx R \left( \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_1}$$

Сосредоточенный момент от этой тяги  $\bar{R}$  :

$$M_{RZ1} = -R y_T - R \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_T} (x_C - x_T)$$

$$y_T = y \Big|_{x=x_T}$$

Можем записать уравнение динамики с учетом упругих колебаний.

подъемная сила равна нормальной. Запишем в проекциях на оси сопряженного трехгранника:

$$\tau: m \frac{dV}{dt} = R - G \sin \Theta - \frac{1}{2} c_x \rho S V^2$$

$$n: mV \frac{d\Theta}{dt} - R\alpha - G \cos \Theta + \frac{1}{2} c_y \rho S V^2 + R \left( \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right)_{x=x_T}$$

относительно  $z_1$  запишем момент:

$$I_{z_1} \frac{d\omega_{z_1}}{dt} = M_{R_{\text{нпр}}} + \frac{1}{2} m_{z_1} \rho S V^2 l - R \left( \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right)_{x=x_T} (x_C - x_T)$$

$$\frac{dx_0}{dt} = V \cos \Theta; \quad \frac{dy_0}{dt} = V \sin \Theta.$$

$$\text{Уравнение управления: } \delta_B = \delta_B(\vartheta, \omega_z, \dots)$$

$$\text{Момент, определяемый жестким корпусом: } m_{z_1} = m_{z_0} + m_{z_1}^\alpha \alpha + m_{z_1}^{\delta_B} \delta_B + m_{z_1}^\omega \frac{\omega_{z_1} l}{V}.$$

где  $m_{z_1}^\omega \frac{\omega_{z_1} l}{V}$  - тушащий момент.

## §2. Уравнение упругих поперечных колебаний и его решение.

При составлении этого уравнения следует учитывать силы внутреннего неупругого сопротивления и продольного усилия, вызванные силой тяги и силой тяжести, а также влиянием движения топлива в баках. Для упрощения будем пренебрегать силой внутреннего неупругого сопротивления и силой продольного усилия.

Получим дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 y^2(x,t)}{\partial t^2} = q(x,t) \quad (1.)$$

где  $x$  - координата точки на продольной оси. Отсчитывается от носа корпуса.

$y(x,t)$  - смещение в направлении оси балки,

$I$  - изгибная жесткость.

$m(x)$  - погонная масса – масса единицы длины.

$q(x,t)$  - погонная нагрузка перпендикулярная оси балки (сила на единицу длины).

При действующей сосредоточенной силе её можно привести к погонной используя дельта функцию Дирака:  $q_F(x_r, t) = F_r \delta(x - x_r)$

Решение  $y(x,t)$  можно получить по постановке краевой задачи, учитывая граничные условия.

Для корпуса в полете оба конца свободны.

$$EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} \Big|_{x=l} = 0 \quad (2.) - \text{изгибный момент.}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=0} = 0 \quad (3.) - \text{перерезывающая сила.}$$

(2.) и (3.) – граничные условия.

$y(x,0) = y_0$ ;  $y(x,0) = 0$ . - начальные условия.

$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$  (4.) - свободные плюс вынужденные колебания.

$y_1$  найдем как решение обратного уравнения:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right) + m(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = q(x, t) \quad (5.)$$

$y_1$  - должен удовлетворять (5.), граничным условиям (2.) и (3.) и начальным условиям.

$y_2(x, t)$  - должен удовлетворять данному уравнению (1.)

При таком выборе  $y_1$  и  $y_2$ , их сумма (4.) и будет общим решением уравнения (1.)

### §3. Определение свободных колебаний.

Используем метод Фурье:

$$y_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(t) f_n(x) \quad (6.) \quad \text{где} \quad S_n(t) f_n(x) - \text{частное решение уравнения (5.)}$$

Подставляя значения  $y_1(x, t)$  в (5.) можно получить систему уравнения.

$$[EI(x) f_n''(x)]'' - \omega_n^2 m(x) f_n(x) = 0 \quad (7.)$$

$$S_n(t) + \omega_n^2 S_n(t) = 0 \quad (8.)$$

$\omega_n^2$  - постоянная величина.

Принятая форма решений (6.) показывает, что система (8.) определяет закон колебаний во времени каждой точки упругой линии, а система (7.) определяет распределение амплитуд колебаний вдоль этой линии.

Для решения (7.) необходимо четыре условия, которые на основании условий (2.) и (3.) приобретают следующий вид:

$$f_n''(0) = 0; \quad f_n''(l) = 0; \quad [EI(x) f_n''(x)]'_{x=0} = 0; \quad [EI(x) f_n''(x)]'_{x=l} = 0. \quad (10.)$$

Задача (7.)+(9.)+(10.) имеет элементарное решение  $f_n(x) = 0$  при каждом постоянном  $\omega_n$ .

Примечание:

Если  $I(x)$  и  $m(x) = const$  (однородная балка), то задача (7.)+(9.)+(10.) имеет точное аналитическое решение через принцип суперпозиции.

Если балка неоднородна, то точного аналитического решения не существует и оно ищется приближенно.

### **Список литературы:**

- 1.** Конспект лекций по курсу «Динамика полета» (седьмой семестр, читал лекции Санников В. А.)
- 2.** Учебное пособие. Под. ред. В.А. Санников, Математические модели динамики ЛА. 1988г.
- 3.** Кочин Н.Е., Теоретическая гидромеханика. 1963г.



## Отчет по эксплуатационной практике.

Я, студент группы А-591, Лукьященко К. В. подготовил электронную версию лекций по курсу «Динамика полета» (седьмой семестр).

Вел лекции проф. Санников В.А.

Курс был прочитан в седьмом семестре в течении 84 часов.

Данный курс закончился экзаменом.