ГЛАВА 2. НЕВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ

При движении КА в космическом пространстве на него действуют силы тяготения небесных тел, тяга реактивного двигателя, аэродинамические силы, сила воздействия магнитного поля, сила давления солнечных лучей. Полное и достоверное знание условий полета КА является необходимым фактором при его проектировании и создании. Неучет каких – либо условий, в которых может оказаться КА в процессе полета, может привести к потере КА или к прекращению его функционирования. Однако при решении многих задач космодинамики достаточно учитывать воздействие на КА только одного, наиболее сильного притягивающего тела и пренебрегать влиянием других небесных тел и другими факторами. Учитывая, что масса КА мала по сравнению с массой основного притягивающего тела, КА правомерно рассматривать как материальную точку, притягиваемую к центральному телу, но не притягивающую это тело. Принятие подобного предположения приводит к понятию «пассивно гравитирующего КА». Движение материальной точки, которое происходит под действием только одной центральной силы гравитационного притяжения, величина которой подчиняется закону всемирного тяготения, называется невозмущенным или кеплеровским движением. В этом случае оказывается возможным аналитически получить все необходимые первые интегралы векторного уравнения движения, полностью его описывающие. Для решения этой задачи обычно используют хорошо разработанные в небесной механике методы решения задачи двух тел, учитывая при этом, что одно из тел (КА) принимается за тело бесконечно малой массы (ограниченная задача двух тел).

2.1. Математическая модель невозмущенного движения.

Будем рассматривать абсолютное движение точки (КА) (в инерциальной системе координат (СК)) относительно притягивающего центра, например, центра Земли в рамках ограниченной задачи двух тел. Векторное уравнение такого движения имеет вид:

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}\bar{r}\,, \tag{2.1}$$

где $\bar{r}$ – радиус-вектор точки относительно притягивающего центра, μ – гравитационный параметр притягивающего тела.

В инерциальной СК $Oxyz$, где O – центр притяжения, уравнение (2.1) запишется в виде:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} = 0; \\ &\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} = 0; \\ &\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} = 0; \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}$

Система (2.2) является системой 6-го порядка. Для её решения необходимо определить 6 первых интегралов. Получим эти интегралы.

2.2. Первые интегралы.

Интеграл моментов количества движения.

Умножим первое уравнение системы (2.2) на y, а второе на x и вычтем одно из другого:

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0\,,$$

или

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0\,.$$

Интегрируя это уравнение, получим:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c_3\,, \tag{2.3}$$

аналогично можно получить:

$$y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}=c_1, \qquad (2.4)$$

$$z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}=c_2. \qquad (2.5)$$

Найденные три интеграла (2.3) – (2.5) носят название интегралов площадей. В векторной форме эти равенства соответствуют одному выражению:

$$\bar{r}\times\bar{V}=\bar{h}, \qquad (2.6)$$

где $\bar{r}(x,y,z)$; $\bar{V}(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$; $\bar{h}(c_1,c_2,c_3)$.

Если умножить интегралы (2.3) – (2.5) соответственно на z,x,y и результаты сложить, то получим:

$$c_1x+c_2y+c_3z=0 \qquad (2.7)$$

– уравнение плоскости. В векторной форме можно записать: $\bar{h}\cdot\bar{r}=0$.

Таким образом, движение материальной точки под действием центральной силы происходит в плоскости, проходящей через точку «О». Положение этой плоскости в пространстве полностью определяется начальными условиями движения. Двигаясь в плоскости (2.7) материальная точка сохраняет свою скорость постоянной. В этом легко убедиться из векторного представления интеграла площадей $\bar{r}\times\bar{V}=\bar{h}$. Модуль этого векторного произведения есть удвоенная секторная скорость (площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{r}$ и $\bar{V}$). Обозначим секторную скорость, то есть, приращение площади «*A*», отметаемой радиусом движущейся точки за единицу времени через $\frac{dA}{dt}$. Имеем:

$$h=2\frac{dA}{dt}=\sqrt{(y_0\dot{z}_0-z_0\dot{y}_0)^2+(z_0\dot{x}_0-x_0\dot{z}_0)^2+(x_0\dot{y}_0-y_0\dot{x}_0)^2}=\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}, \qquad (2.8)$$

где индексом «0» обозначены начальные координаты и скорости.

Интегрируя (2.8), получаем:

$$A=\frac{1}{2}h(t-t_0),$$

т.е. площадь сектора А растет пропорционально времени t.

В полярных координатах r и φ (рис. 2.1) интеграл площадей запишется в виде:

$$h = r^2 \frac{d\varphi}{dt}, \tag{2.9}$$

где $\frac{d\varphi}{dt}$ – угловая скорость радиуса-вектора точки. Равенство (2.9) легко получить из векторного представления интеграла площадей $\bar{r} \times \bar{V} = \bar{h}$, представив скорость точки $\bar{V}$ в виде разложения по осям полярной СК (рис.2.1):

$$\bar{V} = \bar{V}_r + \bar{V}_\varphi = \dot{r}\bar{r}^o + r\dot{\varphi}\bar{\varphi}^o,$$

где $\bar{r}^o = \frac{\bar{r}}{r}$, $\left|\bar{r}^o\right| = 1$, $\left|\bar{\varphi}^o\right| = 1$.

Далее,

$$\bar{h} = \bar{r} \times \left(\dot{r}\bar{r}^o + r\dot{\varphi}\bar{\varphi}^o\right) = \bar{r} \times r\dot{\varphi}\bar{\varphi}^o = r^2\dot{\varphi}\left(\bar{r}^o \times \bar{\varphi}^o\right) = r^2\dot{\varphi}\bar{h}^o,$$

где $\bar{h}^o = \bar{r}^o \times \bar{\varphi}^o$ - единичный вектор (орт) перпендикулярный плоскости движения точки. Так как вектор $\bar{h}$ перпендикулярен движению точки $\left(\bar{r}, \bar{V}\right)$, то можно записать:

$$\bar{h} = h\bar{h}^o,$$

и тогда приходим к соотношению (2.9). Записывая соотношение (2.9) в виде $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r^2}h$ и учитывая, что $h = const$, можем заключить, что при увеличении длины радиуса-вектора точки, его угловая скорость уменьшается. Если учесть, что компонента скорости $\bar{V}_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt}\bar{\varphi}^o$ является трансверсальной компонентой (2.1), то можно записать следующую простую форму скалярного интеграла площадей:

$$rV_\varphi = h. \tag{2.10}$$

Последнее равенство можно рассматривать как взаимооднозначное соотношение между длиной радиуса-вектора точки и её трансверсальной скоростью.

Интеграл энергии.

Умножим векторное уравнение (2.1) скалярно на $\overline{V}=\frac{d\overline{r}}{dt}$:

$$\overline{V}\cdot\frac{d^2\overline{r}}{dt^2}=-\frac{\mu}{r^3}\overline{r}\cdot\frac{d\overline{r}}{dt}$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}\right)=-\frac{\mu}{r^3}\frac{d}{dt}\left(\frac{r^2}{2}\right)=\mu\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right),$$

т.е.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}-\frac{\mu}{r}\right)=0$$

и тогда получаем:

$$\frac{V^2}{2}-\frac{\mu}{r}=c=const\ .$$

Иначе можно записать:

$$V^2-\frac{2\mu}{r}=2c=H=\mathrm{const} \qquad (2.11)$$

– интеграл энергии.

Из соотношения (2.11) следует, что в течение всего времени движения величины скорости и радиуса-вектора находятся во взаимно однозначном соответствии. Чем больше удаляется точка от центра притяжения, тем меньше её скорость.

Интегралы Лапласа.

Вводим следующие обозначения:

$$r^2=x^2+y^2+z^2,$$

$$r'=\overline{r}\frac{d\overline{r}}{dt}=x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}=x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z}=\overline{r}\cdot\overline{V}\ .$$

Тогда:

$$\frac{dr'}{dt}=\dot{r}'=x\ddot{x}+y\ddot{y}+z\ddot{z}+\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2.$$

Подставив в последнее выражение вместо $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ их значения из формул (2.2), а вместо квадрата скорости $V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ его значение из интеграла энергии (2.11), получим:

$$\dot{r}' = -\frac{\mu}{r} + V^2 = \frac{\mu}{r} + H .$$

Дифференцируя это выражение, получим:

$$\ddot{r}' = -\frac{\mu}{r}\frac{dr}{dt} = -\frac{\mu}{r^2}\dot{r} = -\frac{\mu r'}{r^3},$$

так как:

$$r' = \bar{r} \cdot \bar{\dot{r}} = rV\cos\left(\bar{r}\,{}^\wedge \overline{V}\right) = rV_r = r\dot{r}$$

или:

$$\frac{d^2 r'}{dt^2} + \frac{\mu r'}{r^3} = 0 . \qquad (2.12)$$

Уравнение (2.12) структурно похоже на уравнения (2.2).

Умножим первое из уравнений (2.2) на $-r'$, а уравнение (2.12) на x и сложим результаты:

$$x\ddot{r}' - r'\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(x\dot{r}' - r'\dot{x}\right) = 0 .$$

Аналогично получаются и другие уравнения:

$$y\ddot{z}' - r'\ddot{y} = \frac{d}{dt}\left(y\dot{z}' - r'\dot{y}\right) = 0 ;$$

$$z\ddot{r}' - r'\ddot{z} = \frac{d}{dt}\left(z\dot{r}' - r'\dot{z}\right) = 0 ;$$

Интегрирование этих уравнений дает интегралы Лапласа:

$$x\dot{r}' - r'\dot{x} = f_1 ; \qquad (2.13)$$

$$y\dot{r}' - r'\dot{y} = f_2 ; \qquad (2.14)$$

$$z\dot{r}' - r'\dot{z} = f_3 ; \qquad (2.15)$$

Интегралы Лапласа можно представить в другой форме, если перейти к координатам и составляющим скорости, используя формулы для $\dot{r}'$ и r':

$$-\mu\frac{x}{r} - \dot{z}\left(z\dot{x} - x\dot{z}\right) + \dot{y}\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right) = f_1 ; \qquad (2.16)$$

$$-\mu \frac{y}{r} - \dot{x}(x\dot{y} - y\dot{x}) + \dot{z}(y\dot{z} - z\dot{y}) = f_2; \quad (2.17)$$

$$-\mu \frac{z}{r} - \dot{y}(y\dot{z} - z\dot{y}) + \dot{x}(z\dot{x} - x\dot{z}) = f_3; \quad (2.18)$$

Интегралы (2.16) – (2.18) эквивалентны одному векторному соотношению:

$$\bar{V} \times \bar{h} = \mu \bar{r}^{o} + \bar{f}, \quad (2.19)$$

где

$$\bar{r}^{o} = \frac{\bar{r}}{r}, \; \bar{r} \times \bar{V} = \bar{h}, \; \bar{V} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}, \; \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \; \bar{f} = f_1\bar{i} + f_2\bar{j} + f_3\bar{k}.$$

Вектор $\bar{f}$ называется вектором Лапласа. Вектор $\bar{f}$ ортогонален векторной постоянной интеграла площадей $\bar{h}$ и поэтому лежит в плоскости траектории точки. В этом легко убедиться, вычислив скалярное произведение:

$$\bar{f} \cdot \bar{h} = \left(\bar{V} \times \bar{h} - \mu \bar{r}^{o}\right) \cdot \bar{h} = \left(\bar{V} \times \bar{h}\right) \cdot \bar{h} - \mu \bar{r}^{o} \cdot \bar{h} = 0.$$

Равенство нулю скалярного произведения векторов свидетельствует об их перпендикулярности.

Таким образом, для системы дифференциальных уравнений (2.2), которая имеет шестой порядок, получено семь первых интегралов и соответственно семь постоянных $c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3$. У системы 6-го порядка независимых первых интегралов шесть. Поэтому между полученными интегралами существует, по крайней мере, одна зависимость. Можно установить, что на самом деле таких зависимостей две: [5]

$$\bar{h} \cdot \bar{f} = c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = 0 \quad (2.20\text{ а})$$

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = \mu^2 + H\left(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right), \quad (2.20\text{ б})$$

или

$$f^2 = \mu^2 + Hh^2.$$

Условие (2.20 а) следует из ортогональности векторов $\bar{f}$ и $\bar{h}$, а условие (2.20 б) показывает, что вектора $\bar{f}$ и $\bar{h}$ не могут быть одновременно равны нулю. Используя соотношения (2.20) можно выразить любые две из семи постоянных в функции 5 остальных, которые остаются произвольными.

Недостающий шестой интеграл может быть найден простой квадратурой. Действительно, из уравнений (2.3) – (2.5), (2.11), (2.16) – (2.18) можно выразить любые пять из величин $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ через шестую (например, через x) [7]:

$$\begin{aligned} y &= \varphi_1(x, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3) \\ z &= \varphi_2(x, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3) \\ \dot{x} &= \varphi_3(x, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3) \\ \dot{y} &= \varphi_4(x, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3) \\ \dot{z} &= \varphi_5(x, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3) \end{aligned} \tag{2.21}$$

Берём любое из трех последних уравнений, например, уравнение для $\dot{x}$:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \varphi_3(x, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3).$$

Интегрируя это соотношение, найдем зависимость x от независимой переменной t:

$$\int \frac{dx}{\varphi_3(x, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3)} = t + c,$$

где $c = \text{const}$ – постоянная интегрирования. Вычисляя интеграл найдем:

$$x = \psi_1(t, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3, c).$$

Подставляя это выражение в (2.21), получим:

$$\begin{aligned} x &= \psi_1(t, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3, c) \\ y &= \psi_2(t, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3, c) \\ z &= \psi_3(t, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3, c) \\ \dot{x} &= \psi_4(t, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3, c) \\ \dot{y} &= \psi_5(t, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3, c) \\ \dot{z} &= \psi_6(t, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3, c) \end{aligned} \tag{2.22}$$

Соотношения (2.22) дают общий интеграл системы уравнений (2.2). Первые три уравнения являются параметрическими уравнениями траектории КА, а последние определяют составляющие скорости для любого момента времени. Зная составляющие скорости, можно найти её величину:

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

и направляющие косинусы:

$$\frac{\dot{x}}{V}, \frac{\dot{y}}{V}, \frac{\dot{z}}{V}$$

вектора $\overline{V}$.

Произвольные постоянные $c, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3$ определяются из начальных условий. Пусть в некоторый начальный момент времени t_0 (который в астрономии называют эпохой), известны координаты и составляющие скорости КА: $t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$.

Постоянные интеграла площадей, найдем, подставляя соответствующие начальные значения в (2.3) – (2.5).

$$c_1 = y_0\dot{z}_0 - z_0\dot{y}_0,$$

$$c_2 = z_0\dot{x}_0 - x_0\dot{z}_0,$$

$$c_3 = x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0,$$

$$h = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}.$$

Направляющие косинусы плоскости орбиты:

$$\frac{c_1}{h}, \frac{c_2}{h}, \frac{c_3}{h}.$$

Постоянная энергии находится из выражения (2.11):

$$H = V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0},$$

где

$$V_0{}^2 = \dot{x}_0{}^2 + \dot{y}_0{}^2 + \dot{z}_0{}^2, \; r_0 = \sqrt{x_0{}^2 + y_0{}^2 + z_0{}^2}.$$

Постоянные Лапласа определяются из уравнений (2.13) - (2.15):

$$f_1 = x_0\dot{r}_0' - r_0'\dot{x}_0,$$

$$f_2 = y_0\dot{r}_0' - r_0'\dot{y}_0,$$

$$f_3 = z_0\dot{r}_0' - r_0'\dot{z}_0,$$

где

$$r_0' = x_0\dot{x}_0 + y_0\dot{y}_0 + z_0\dot{z}_0,$$

$$\dot{r}_0' = -x_0 \mu \frac{x_0}{r_0^3} - y_0 \mu \frac{y_0}{r_0^3} - z_0 \mu \frac{z_0}{r_0^3} + \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2,$$

$$f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2},$$

направляющие косинусы вектора $\bar{f}$:

$$\frac{f_1}{f}, \frac{f_2}{f}, \frac{f_3}{f}.$$

Произвольную постоянную «c» найдем из выражения:

$$c = -t_0 + \Phi_3(x_0, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3),$$

где

$$\Phi_3(\cdot) = \int \frac{dx}{\varphi_3(x_0, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3)}.$$

2.3. Уравнение орбиты невозмущенного движения КА в полярных координатах

Чтобы получить формулы (2.21) нужно разрешить уравнения (2.3) – (2.5), (2.11), (2.16) – (2.18) относительно пяти из шести неизвестных функций. Но эти уравнения являются уравнениями 2-ой степени относительно всех шести неизвестных и содержат иррациональность, представляемую радиус-вектором. Поэтому непосредственное использование найденных соотношений затруднительно. Однако можно использовать выявленные ранее некоторые свойства. Ранее было показано (см. рис. 2.1), что траектория КА в инерциальной СК является плоской кривой. Поэтому удобно перейти к полярной СК. В этой системе уравнением орбиты будет зависимость длины радиус-вектора точки от полярного угла, измеренного в плоскости траектории. Такой угол удобно отсчитывать от вектора Лапласа $\bar{f}$, который принадлежит плоскости траектории. Этот угол называется в астрономии истинной аномалией и обозначается буквой ϑ (греческая буква «ипсилон»). Итак, уравнение орбиты это зависимость $r = r(\vartheta)$. Такую зависимость легко получить, используя векторную форму интеграла Лапласа (2.19).

Умножим уравнение (2.19) скалярно на $\bar{r}$. Учитывая, что:

$$\left(\bar{V}\times\bar{r}\right)\cdot\bar{r}=\left(\bar{r}\times\bar{V}\right)\cdot\bar{h}=\bar{h}\cdot\bar{h}=h^2,$$

получим:

$$h^2=\mu\bar{r}^o\cdot\bar{r}+\bar{f}\cdot\bar{r}$$

или:

$$h^2=\mu r+fr\cos\vartheta,$$

где ϑ – угол между векторами $\bar{f}$ и $\bar{r}$.

Далее получаем:

$$r=\frac{h^2/\mu}{1+f/\mu\cos\vartheta}. \qquad (2.23)$$

Соотношение (2.23) есть полярное уравнение кривой второго порядка, один из фокусов которой находится в начале координат (в притягивающем центре), а главная ось совпадает с направлением вектора Лапласа. Ось орбиты в астрономии называется линией аспид. Введя обозначения:

$p=\dfrac{h^2}{\mu}$ - фокальный параметр,

$e=\dfrac{f}{\mu}$ - эксцентриситет, перепишем уравнение (2.23):

$$r=\frac{p}{1+e\cos\vartheta}. \qquad (2.24)$$

Это уравнение кривой конического сечения. Оно содержит две константы: p и e, которые определяют размер и форму траектории.

Размер орбиты определяется значением фокального параметра, а форма орбиты – значением эксцентриситета:

При $e=0$ получаем окружность,

$e=1$ - параболу,

$e<1$ - эллипс,

$e>1$ - гиперболу.

Главная ось, совпадающая с вектором Лапласа, является осью симметрии траектории и направлена в ближайшую точку от притягивающего центра (перицентр). Фокальный параметр определяет удаление КА от притягивающего центра. При $\vartheta = \frac{\pi}{2}$:

$$r\Big|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = p\,.$$

Фокальный параметр и эксцентриситет выражаются через начальные условия следующими формулами (рис. 2.2):

$$p = \frac{h^2}{\mu},$$

$$h = \left|\bar{r} \times \bar{V}\right| = rV\sin\left(\bar{r}\wedge\bar{V}\right) = rV\cos\theta = r_0 V_0 \cos\theta_0\,,$$

где $\theta -$ угол между линией местного горизонта – перпендикуляром к радиусу-вектору $\bar{r}$ и вектором скорости $\bar{V}$.

$$p = \frac{r_0^2 V_0^2 \cos^2\theta_0}{\mu}, \qquad (2.25)$$

$$e = \frac{f}{\mu},$$

$$f = \sqrt{\mu^2 + Hh^2}\,, \qquad \text{(см. 2.21)}$$

$$H = V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0},$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{Hh^2}{\mu^2}} = \sqrt{1 + \frac{\left(V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}\right) r_0^2 V_0^2 \cos^2\theta_0}{\mu^2}}\,. \qquad (2.26)$$

Таким образом, характер траектории зависит от начальных условий: r_0, V_0, θ_0. Используя уравнения (2.24) и (2.9) получим выражение для скорости и найдем время движения.

2.4. Орбиты конического сечения

Скорость КА в произвольной точке орбиты выразим через компоненты по осям полярной СК: радиальную V_r и трансверсальную $V_\text{т}$ (рис. 2.2).

Имеем: $\overline{V} = \overline{V}_r + \overline{V}_т$, где $V_r = \dfrac{dr}{dt}, V_т = r\dfrac{d\vartheta}{dt}$. Используя полярное уравнение орбиты, получим:

$$V_r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{pe\sin\vartheta}{(1 + e\cos\vartheta)^2}\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Из уравнения (2.9), принимая во внимание, что $\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{d\vartheta}{dt}$, найдем $\dfrac{d\vartheta}{dt} = \dfrac{h}{r^2}$. Учитывая (2.24), получим:

$$V_r = \frac{h}{p}e\sin\vartheta = \sqrt{\frac{\mu}{p}}e\sin\vartheta \quad \left(h = \sqrt{p\mu}\right) \tag{2.27}$$

радиальная проекция скорости.

Далее находим $V_т$:

$$V_т = r\frac{d\vartheta}{dt} = r\frac{h}{r^2} = \frac{h}{r} = \frac{h}{p}(1 + e\cos\vartheta) = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 + e\cos\vartheta) \tag{2.28}$$

трансверсальная проекция скорости.

Модуль скорости получим геометрическим суммированием V_r и $V_т$:

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_т^2} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\sqrt{1 + e^2 + 2e\cos\vartheta}. \tag{2.29}$$

Время полета можно найти, используя уравнение (2.9):

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = r^2\frac{d\vartheta}{dt} = h.$$

Используя уравнение траектории (2.24), можем записать:

$$\frac{p^2}{h}\frac{d\vartheta}{(1 + e\cos\vartheta)^2} = dt.$$

После интегрирования получаем:

$$t - \tau = \frac{p^2}{h}\int_0^{\vartheta}\frac{d\vartheta}{(1 + e\cos\vartheta)^2}, \tag{2.30}$$

где $\tau -$ время прохождения КА через перицентр ($\vartheta = 0$), $t, \vartheta -$ текущие значения времени и истинной аномалии.

Установим связь между положением точки и её скоростью. Для этого наряду с полярной введем в рассмотрение декартову СК $O\xi\eta\zeta$ (рис.2.2), плоскость $\xi\eta$, которой совпадает с плоскостью траектории, а ось ξ направлена по вектору Лапласа, т.е. в перицентр. Используя формулы (2.27) и (2.28) легко можно получить:

$$\cos\vartheta = \frac{1}{e\mu}\left(hV_{\text{т}} - \mu\right) = \frac{1}{e\mu}\left(\frac{\left|\overline{r}\times\overline{V}\right|^2}{r} - \mu\right), \qquad (2.31)$$

$$\sin\vartheta = \frac{hV_r}{\mu e} = \frac{\left|\overline{r}\times\overline{V}\right|}{\mu e r}\left(\overline{r}\cdot\overline{V}\right), \qquad (2.32)$$

где $\left|\overline{r}\times\overline{V}\right| = h = rV\cos\theta$, $\left(\overline{r}\cdot\overline{V}\right) = rV\sin\theta$, $V_{\text{т}} = V\cos\theta$, $V_r = V\sin\theta$.

Формулы (2.31) и (2.32) служат для определения связи истинной аномалии с радиус-вектором и скоростью точки. Обозначим $\overline{\xi}^o$, $\overline{\eta}^o$, $\overline{\zeta}^o$ - орты соответствующих осей (плоскость $\xi\eta$ совпадает с плоскостью траектории). Найдем выражения для этих ортов.

Можно записать (рис.2.2):

$$\overline{r} = r\cos\vartheta\overline{\xi}^o + r\sin\vartheta\overline{\eta}^o. \qquad (2.33)$$

Откуда находим:

$$\overline{\xi}^o = \frac{\overline{r}}{r\cos\vartheta} - \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\overline{\eta}^o. \qquad (2.34)$$

Скорость в произвольной точке:

$$\overline{V} = \frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{dr\overline{r}^o}{dt} = \frac{dr}{dt}\overline{r}^o + \overline{\omega}_r \times \overline{r},$$

где $\overline{\omega}_r = \dot{\vartheta}\overline{\xi}^o$ - угловая скорость вектора $\overline{r}$, причем $\dot{\vartheta} = \frac{h}{r^2}$, а $\overline{r} = \overline{r}^o r$. Вычисляя векторное произведение $\overline{\omega}_r \times \overline{r} = \overline{V}_{\text{т}}$, находим:

$$\overline{V} = V_r\overline{r}^o + \overline{V}_\tau = V_r\overline{r}^o + \frac{h}{r}\left(\overline{\eta}^o\cos\vartheta - \overline{\xi}^o\sin\vartheta\right),$$

где $V_r = \frac{dr}{dt} = \frac{\mu e\sin\vartheta}{h}$ и $\overline{\eta}^o = \frac{\overline{V}_r - V_r\overline{r} + h\sin\vartheta\overline{\xi}^o}{h\cos\vartheta}$.

Подставляя полученное выражение $\overline{\eta}^o$ в формулу (2.34) и учитывая, что $h = \sqrt{p\mu}$, получим:

$$\bar{\xi}^o = \frac{e+\cos\vartheta}{p}\bar{r} - \frac{r}{\sqrt{p\mu}}\sin\vartheta\bar{V}\ . \tag{2.35}$$

Аналогично найдем:

$$\bar{\eta}^o = \frac{\sin\vartheta}{p}\bar{r} + \frac{r\cos\vartheta}{\sqrt{p\mu}}\bar{V}\ , \tag{2.36}$$

и, наконец:

$$\bar{\xi}^o = \bar{\xi}^o \times \bar{\eta}^o\ .$$

Используя формулу (2.35) можно легко найти радиус-вектор перицентра траектории:

$r_{\text{п}} = r_{\text{п}}\bar{\xi}^0$, где $r_{\text{п}} = r\big|_{\vartheta=0} = \dfrac{p}{1+e}$.

Теперь установим связь между значениями радиуса-вектора $\bar{r}_2$ и вектора скорости $\bar{V}_2$ в точке с истинной аномалией ϑ_2 с соответствующими значениями $\bar{r}_1$, $\bar{V}_1$, ϑ_1.

Для этого запишем:

$\bar{r}_2 = r_2\cos\vartheta_2\bar{\xi}^o + r_2\sin\vartheta_2\bar{\eta}^o$. Орты $\bar{\xi}^o$ и $\bar{\eta}^o$ выразим по формулам (2.35) и (2.36), заменив в них $\bar{r}, \bar{V}, \vartheta$ соответственно на $\bar{r}_1, \bar{V}_1, \vartheta_1$.

В результате получим:

$$\bar{r}_2 = \left\{1 - \frac{r_2}{p}\left[1-\cos(\vartheta_2-\vartheta_1)\right]\right\}\bar{r}_1 + \frac{r_2 r_1}{\sqrt{\mu p}}\sin(\vartheta_2-\vartheta_1)\bar{V}_1. \tag{2.37}$$

Аналогично можно получить следующую формулу:

$$\bar{V}_2 = \left\{\frac{(\bar{r}_1\cdot\bar{V}_1)}{pr_1}\left[1-\cos(\vartheta_2-\vartheta_1)\right] - \frac{1}{r_1}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\sin(\vartheta_2-\vartheta_1)\right\}\bar{r}_1 + \left\{1-\frac{r_1}{p}\left[1-\cos(\vartheta_2-\vartheta_1)\right]\right\}\bar{V}_1\ . \tag{2.38}$$

Формула (2.37) используется для определения скорости $\bar{V}_1$ в начальной точке в зависимости от $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ и угла между ними: $\Phi = \vartheta_2 - \vartheta_1$. Находим:

$$\bar{V}_1 = \frac{\sqrt{\mu p}}{r_1 r_2\sin\Phi}\left\{\bar{r}_2 - \left[1-\frac{r_2}{p}(1-\cos\Phi)\right]\bar{r}_1\right\}. \tag{2.39}$$

Аналогичным образом можно найти скорость $\bar{V}_2$ в конечной точке:

$$\bar{V}_1 = \frac{\sqrt{\mu p}}{r_1 r_2 \sin\Phi}\left\{-\bar{r}_1 + \left[1 - \frac{r_1}{p}\left(1 - \cos\Phi\right)\right]\bar{r}_2\right\}. \qquad (2.40)$$

Рассмотрим характерные орбиты космических ЛА.

2.5. Эллиптические орбиты

Как известно, при $0 < e < 1$ уравнение (2.24) соответствует эллипсу, один из фокусов которого находится в центре притяжения (рис. 2.3). Точки F_1 и F_2 – фокусы эллипса, причем с гравитирующим центром совмещается фокус F_1. От вектора Лапласа $\bar{f}$ отсчитывается истинная аномалия ϑ, определяющая положение радиуса-вектора. Точка орбиты с минимальным радиусом-вектором называется перицентром и обозначается «п». Перицентр соответствует нулевой истинной аномалии, а радиус-вектор перицентра $\bar{r}_\text{п}$ направлен по вектору Лапласа. Из равенства (2.24) следует:

$$r_\text{п} = r\big|_{\vartheta=\pi} = \frac{p}{1-e}.$$

Максимальное значение длины радиуса-вектора достигается при $\vartheta = \pi$. Эта точка орбиты называется апоцентром и обозначается «а». Радиус-вектор апоцентра $\bar{r}_\text{а}$ определяется формулой:

$$r_\text{а} = r\big|_{\vartheta=\pi} = \frac{p}{1-e}.$$

Линия АП, проходящая через апоцентр и перицентр называется линией апсид, а перицентр и апоцентр орбиты называются апсидными точками. При рассмотрении орбит спутников (естественных и искусственных) часто вводятся специальные термины для обозначения перицентров и апоцентров орбиты. Так, для орбит спутников Земли используются термины перигей и апогей. Для орбит спутников Солнца – перигелий и афелий. Для орбит спутников Луны – периселений и апоселений. Для орбит спутников звезды – периастр и апоастр. Фокальный параметр «p» определяет удаление КА от притягивающего центра при $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$: $p = r\big|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}}$. Форма и размер эллиптической орбиты могут быть определены не только фокальными параметром и эксцентриситетом, но и любыми другими константами, по которым можно найти p и e. Среди них уже встречавшиеся $r_{\text{п}}, r_{\text{а}}, h, f, H$, а также большая «$a$» и малая «$b$» полуоси эллипса, фокальное расстояние «c» (рис.2.3). Из всех этих параметров независимыми являются два, а остальные можно найти по соотношениям. Приведём некоторые из этих соотношений:

$$a = \frac{p}{1-e^2},\ b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}},\ c^2 = a^2 - b^2,\ e = \frac{c}{a},\ p = \frac{b^2}{a},\ b = a\sqrt{1-e^2},$$

$$e = \frac{f}{\mu} = \sqrt{1 + \frac{Hh^2}{\mu^2}},\ a = \frac{1}{2}(r_{\text{а}} + r_{\text{п}}),\ H = -\frac{\mu}{a}. \qquad (2.41)$$

Последнее из соотношений выражает связь между константой энергии и величиной большой полуоси орбиты спутника. Для вывода этого соотношения используется константа энергии, вычисленная для перигейной точки:

$$H = V_{\text{п}}^2 - \frac{2\mu}{r_{\text{п}}},$$

а также соотношения:

$$a = \frac{p}{1-e^2},\ r_{\text{п}} = \frac{p}{1+e} \text{ и } V_{\text{п}} = \sqrt{\frac{\mu}{p}(1+e)},$$

где $V_{\text{п}} = V|_{\vartheta=0}$ – значение скорости в перицентре. Формула для скорости в произвольной точке любой кривой конического сечения (2.29) была получена ранее. В приложениях часто используется другая формула для скорости КА, записанная как функция большой полуоси эллипса и текущего радиуса орбиты. Используя соотношения:

$$H = -\frac{\mu}{a} \text{ и } H = V^2 - \frac{2\mu}{r}$$

получим:

$$V = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}. \qquad (2.42)$$

Частным случаем эллиптической орбиты является круговая орбита. В круговом движении $e=0$, $r=p=a$. Тогда из формулы (2.42) находим начальную скорость, необходимую для полета по круговой орбите:

$$V_0 = V_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}. \qquad (2.43)$$

Условие $e=0$ на основании (2.26), с учетом (2.43) приводится к виду $\cos^2\theta = 1$ или $\theta_0 = 0, \pi$. Скорость, определяемая формулой (2.43) называется круговой или первой космической скоростью. В точке с радиусом r круговая скорость: $V_{\text{кр}} = V_I = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$.

При $r = r_З$ получим круговую скорость на поверхности Земли. При $r_З = 6371$ км, и $\mu_З = 398600$ км/c^2 получаем $V_{IЗ} = 7{,}91$ км/с. Аналогично для Венеры: $V_{IВ} = 7{,}25$ км/с, для Марса $V_{IМ} = 3{,}56$ км/с, для Луны $V_{IЛ} = 7{,}91$ км/с.

При $e=1$ уравнение (2.24) дает параболу. На основании формулы (2.26) находим, что при этом должно быть: $H = V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} = 0$. Т.е. начальная скорость должна равняться параболической или 2-ой космической скорости:

$$V_0 = V_{\text{пар}} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}. \qquad (2.44)$$

В точке с радиусом r параболическая скорость:

$$V_{\text{пар}} = V_{II} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}.$$

Эта скорость называется также скоростью освобождения т.к. при достижении такой скорости КА преодолевает поле тяготения. Значения параболической скорости при $r = r_{\text{пл}}$ (радиус планеты) для различных планет приводились ранее в таблице 1.2.

Таким образом, если начальная скорость находится в пределах $V_{\text{кр}} < V_0 < V_{\text{пар}}$, то КА будет совершать полёт по эллиптической орбите. Условие $V_0 < V_{\text{пар}} < V_{II}$ является необходимым и достаточным, а условие $V_{\text{кр}} < V_I < V_0$ только достаточным, так как полёт по эллиптической орбите возможен и при меньшей начальной скорости [2]. Чтобы убедиться в этом представим выражение (2.42) с учетом формулы для $V_I = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$ в виде:

$$V = V_I \sqrt{2 - \frac{r}{a}} \, .$$

Отсюда следует, что скорость в перицентре орбиты, т.е. при $r = r_{\text{пар}}$ больше первой космической, а в апоцентре меньше. Значит, при выводе КА в апоцентр орбиты ему необходимо сообщить скорость, меньшую первой космической. Минимальная начальная скорость $V_{0\min}$, обеспечивающая полёт по эллиптической орбите вокруг небесного тела потребуется в том случае, если КА выводится в апоцентр такой орбиты, которая касается своим перицентром поверхности небесного тела. В этом случае (см. 2.42):

$$e = \frac{r_{\text{а}} - r_{\text{п}}}{r_{\text{а}} + r_{\text{п}}} = \frac{r_0 - r_{\text{пл}}}{r_0 + r_{\text{пл}}}$$

и

$$V_{0\min} = V_I \sqrt{\frac{2 r_{\text{пл}}}{r_0 + r_{\text{пл}}}} \, .$$

Следовательно, для полёта по эллиптической орбите вокруг небесного тела необходимо и достаточно выполнить условие:

$$V_I \sqrt{\frac{2 r_{\text{пл}}}{r_0 + r_{\text{пл}}}} < V_0 < V_{II} \, . \qquad (2.45)$$

Необходимо отметить, что для небесного тела, имеющего атмосферу, при определении $V_{0\min}$ нужно в качестве $r_{\text{пл}}$ в условии (2.45) принимать не радиус этого небесного тела, а радиус $r_{\text{э}}$ сферы, соответствующей границе эффективного торможения КА атмосферой. Выполненный выше анализ уравнения (2.24) и выражения (2.42) показывает, что в процессе полета КА по эллиптической орбите его высота над поверхностью небесного тела (расстояние от центра притяжения) изменяется от минимального значения в перицентре до максимального в апоцентре, а скорость - от максимальной в перицентре до минимальной в апоцентре.

Заметим, что значения скоростей КА в перицентре и апоцентре эллиптической орбиты связаны «правилом рычага»:

$$z_{\text{а}} V_{\text{а}} = z_{\text{п}} V_{\text{п}} \tag{2.46}$$

Это правило непосредственно вытекает из интеграла площадей.

Движение по эллиптической орбите сопровождается периодическим перераспределением энергии, переходом кинетической энергии в перицентре в потенциальную в апоцентре, и наоборот,. Полная энергия при этом остается неизменной.

Время полета по эллиптической орбите можно найти из выражения (2.30):

$$t - \tau = \frac{p^2}{h} \int_h^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{(1 + e\cos\vartheta)^2}$$

С помощью замены переменной $z = tg\dfrac{\vartheta}{2}$ можно вычислить интеграл и получить зависимость $t - \tau$ от ϑ. Однако этот путь приводит к громоздким формулам. К некоторому упрощению ведет использование вместо ϑ другой переменной, через которую ϑ выражается достаточно просто. В эллиптическом движении такой переменной является эксцентрическая аномалия «E»:

$$tg\frac{\vartheta}{2} = tg\frac{E}{2}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tag{2.47}$$

На рис.2.4 показана взаимосвязь истинной ϑ и эксцентрической «E» аномалий.

После перехода к новой переменной и интегрирования (2.30), находим:

$$E - e\sin E = M \qquad (2.48),$$

где $M = n(t - \tau)$ - средняя аномалия, а $n = \sqrt{\dfrac{\mu}{a^3}}$ - среднее движение.

Уравнение (2.48) называется вспомогательным уравнением Кеплера. Это уравнение связывает положение спутника на орбите со временем, прошедшим после прохождение перицентра.

Важной характеристикой эллиптической орбиты является период обращения – время полного оборота КА вокруг небесного тела.

Пусть движение начинается из перицентра, т.е. $\tau = 0$. Этот момент (рис.2.4) $E = 0$. Через период T, совершив полный оборот, спутник опять приходит в перицентр и его эксцентрическая аномалия E будет равна 2π. Из уравнения (2.48) следует $2\pi - e\sin 2\pi = nT$, откуда

$$T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \tag{2.49}$$

Таким образом период обращения спутника зависит от большой полуоси его орбиты и не зависит от эксцентриситета. На основании формулы (2.49) легко получить математическое выражение 3-го закона Кеплера:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{4\pi^2}{\mu} = const \tag{2.50}$$

Для круговой орбиты с радиусом $r = p = a$:

$$T = \frac{2\pi r}{V_{\text{кр}}} = \frac{2\pi\kappa}{\sqrt{\frac{\mu}{r}}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mu}} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}.$$

Заметим, что идеальная круговая орбита практически не реализуется, однако на практике достаточно часто встречаются эллиптические орбиты с очень малым эксцентриситетом, т.е. близкие к круговым. Для таких орбит уравнение (2.24) $r = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta}$ разложением в ряд по степеням эксцентриситета «e» представляется в виде:

$$r = p(1 - e\cos\vartheta), \tag{2.51}$$

а время полета:

$$t - \tau = \frac{p^2}{h}\left(\vartheta - 2e\sin\vartheta\right) \tag{2.52}$$

Кроме того, в небесной механике [4] широко используются следующие разложения, дающие явную зависимость параметров орбиты от времени:

$$\begin{aligned}
&\vartheta = M + 2e\sin M + \frac{5}{4}e^2\sin 2M + \ldots \\
&r = a\left(1 - e\cos M + e^2\sin 2M + \ldots\right) \\
&V = V_{Ia}\left(1 + 2e\cos M + 2e^2\cos 2M + \ldots\right), \\
&\nu = n\left(1 + 2e\cos M + \frac{5}{2}e^2\cos 2M + \ldots\right)
\end{aligned} \tag{2.53}$$

где $V_{Ia} = \sqrt{\dfrac{\mu}{a}}$ круговая скорость при $r = a$, $M = n(t - \tau)$ - средняя аномалия;

$n = \sqrt{\dfrac{\mu}{a^3}} = \dfrac{V_{Ia}}{a}$ - среднее движение (средняя угловая скорость обращения);

$\nu = \dfrac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{\dfrac{\mu}{a^3}\dfrac{(1+e\cos\vartheta)^2}{(1-e^2)^{3/2}}}$ - угловая скорость поворота радиуса вектора вокруг центра тяготения.

Для орбит с эксцентриситетом порядка 0,1 в разложениях (2.53) можно ограничиться двумя первыми членами ряда (с погрешностью в несколько процентов).

2.6. Гиперболические орбиты

Гиперболические орбиты являются орбитами небесных тел, способных преодолевать поле тяготения основного притягивающего центра.

Гиперболическая орбита имеет место при $e > 1$, т.е. (см 2.26) при $V_0 > V_{\text{пар}} = \sqrt{\dfrac{2\mu}{r_0}} = V_{II}$.

Гипербола имеет две ветви (рис.2.5). Чаще всего принято считать, что орбита является левой ветвью гиперболы. Перицентр достигается при $\vartheta = 0$ и лежит на линии апсид *ПG*. Расстояние от фокуса F_1 до перицентра $r_{\text{п}} = a(e-1)$. Скорость движения определяется формулами (2.27 – 2.29) при $e > 1$ или по формуле, аналогичной формуле (2.42):

$$V = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right)} \tag{2.54}$$

Фокальный параметр: $p = a(^{2} - 1)$.

Предельное значение истинной аномалии $\vartheta_{\text{пр}}$, отвечающее положению КА на бесконечности получается из полярного уравнения орбиты (2.24) при $r = \infty$:

Имеем : $\cos\vartheta = \dfrac{\frac{p}{r} - r}{e}$.

Откуда получаем

$$\cos\vartheta_{\text{пр}} = \cos\vartheta\big|_{r=\infty} = -\frac{1}{e}. \qquad (2.55).$$

Так как по мере удаления КА от небесного тела касательная к гиперболической орбите, определяющая направление скорости, приближается к асимптоте, последняя может использоваться на этом участке для определения направления скорости. Угол наклона асимптоты к линии апсид (рис.2.5) определяется равенством: $tg\theta_a = -\frac{b}{a}$.

С учетом формул:

$$b = \sqrt{ap}\,; \qquad H = \frac{\mu}{a} = V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}\,; \qquad p = \frac{h^2}{\mu}$$

находим

$$tg\theta_a = -\frac{h}{\mu}\sqrt{V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}} = -\frac{h}{\mu}\sqrt{V_0^2 - V_{II}} \qquad (2.56)$$

Из (2.56) следует, что при начальной скорости $V_0 \approx V_{II} = V_{\text{пар}}$ угол θ_a близок к π. С увеличением V_0 угол θ_a уменьшается, приближаясь к $\frac{\pi}{2}$. Другими словами КА удаляется от небесного тела по более отвесной траектории.

Время движения по гиперболической орбите определяется по формуле (2.30) при $e > 1$ или по уравнению, аналогичному (2.48)

$$n(t-\tau) = e\cdot \mathrm{sh}\,æ - æ, \qquad (2.57)$$

где $\tau -$ время прохождения перицентра, $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$, $th\ æ/2 = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}$, sh æ и th æ - гиперболические синус и тангенс. Можно использовать также следующую формулу:

$$t - \tau = \frac{\sqrt{\frac{p}{\mu}}}{e^2 - 1}\left(\frac{ep\sin\vartheta}{1 + e\cos\vartheta} - \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}}\ln A\right), \qquad (2.58)$$

где

$$A = \frac{e\sin\vartheta + \sqrt{e^2 - 1}}{1 + e\cos\vartheta} + \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}}.$$

Если требуется найти время $t_{\vartheta_2} - t_{\vartheta_1}$ перелета между двумя любыми точками орбиты, то записывая уравнение (2.57) для моментов t_{ϑ_1} и t_{ϑ_2}, получим

$$n\left(t_{\vartheta_2} - t_{\vartheta_1}\right) = æ_2 - æ_1 - (sh\,æ_2 - sh\,æ_1) \qquad (2.59)$$

при использовании формулы (2.58), аналогично найдем:

$$\Delta t = (t_{\vartheta_2} - t_{\vartheta_1}) = \frac{\sqrt{\frac{p}{\mu}}}{e^2 - 1}\left(\frac{ep\sin\vartheta_2}{1 + e\cos\vartheta_2} - \frac{ep\sin\vartheta_1}{1 + e\cos\vartheta_1} - \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}}\ln\frac{A_2}{A_1}\right) \qquad (2.60)$$

где

$$A_i = \frac{e\sin\vartheta_i + \sqrt{e^2 - 1}}{1 + e\cos\vartheta_i} + \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}} \quad (i = 1.2)$$

таким образом, в разделах 2.4 и 2.5 рассмотрены основные типы орбит КА в задаче двух тел.