# ГЛАВА 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

На этапе проектных исследований поиск номинальной (желаемой) траектории КА можно свести к решению двух задач:

1. Заданы начальные условия движения. Требуется определить траекторию КА. Далее можно анализировать, удовлетворяет ли эта траектория заданным конечным условиям.

2. Заданы начальное и конечное положения КА.

Требуется найти траекторию, обеспечивающую перевод КА из начального в конечное положение при выполнении некоторых условий и ограничений. Эта задача соответствует, например, поиску межпланетных траекторий перелета, когда известны взаимное положение планет старта и цели на начальный и конечный моменты времени.

Рассмотрим некоторые их этих задач.

## 4. 1. Определение орбиты по положению и скорости в начальный момент времени

Рассматривается следующая задача.

Пусть для некоторого начального момента времени $t_0$ заданы координаты и составляющие скорости в инерциальной СК $Oxyz$ : $x_0$ , $y_0$ , $z_0$ , $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$. Требуется определить кеплеровские элементы орбиты: $\Omega$, $i$, $\omega$, $p$ (или $a$), $e$, $\tau$ .

Решение поставленной задачи проводим, используя формулы невозмущенного движения, приведенные в разделах 2 и 3. Рассмотрим случай эллиптической траектории.

Прежде всего, используя формулу (2.42): $V=\sqrt{\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)}$ , найдем большую полуось эллипса:

$$\frac{1}{a}=\frac{2}{r_0}-\frac{V_0^2}{\mu}, \qquad (4.1)$$

где $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ , $V_0^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2$.

Далее обратимся к формулам 2.3-2.5 интеграла площадей и таблице 3.1 направляющих косинусов. Учитывая, что $\overline{h} = h\overline{\zeta}^0$, где $\overline{\zeta}^0$ - орт оси $\zeta$ перигейной СК $O\xi\eta\zeta$ из табл.3.1 найдем (см. 3-ий столбец табл.3.1) :

$$C_1 = h_x = h\sin i \sin\Omega, \quad C_2 = h_y = -h\sin i \cos\Omega, \quad C_3 = h_z = h\cos i, \tag{4.2}$$

где $h = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2} = \sqrt{p\mu}$

Теперь применим формулы 2.3-2.5 к начальной точке:

$$\begin{aligned} y_0\dot{z}_0 - z_0\dot{y}_0 &= \sqrt{\mu p}\sin i \sin\Omega \\ z_0\dot{x}_0 - x_0\dot{z}_0 &= \sqrt{\mu p}\sin i \cos\Omega \\ x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0 &= \sqrt{\mu p}\cos i \end{aligned} \tag{4.3}$$

В системе (4.3) левые части заданы по условию задачи.

Решая систему (4.3) находим $p$, $i$, $\Omega$ :

$$\begin{aligned} -\mathrm{tg}\Omega &= \frac{y_0\dot{z}_0 - z_0\dot{y}_0}{z_0\dot{x}_0 - x_0\dot{z}_0} \to \Omega \\ \mathrm{tg} i &= \frac{1}{\sin\Omega}\frac{y_0\dot{z}_0 - z_0\dot{y}_0}{x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0} \to i \\ p &= \frac{1}{\mu\cos^2 i}\left(x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0\right)^2 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Из формулы $p = a\left(1 - e^2\right)$ находим эксцентриситет $e$:

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}} \tag{4.5}$$

Для нахождения истинной аномалии $\vartheta_0$ используем формулы (2.27) для радиальной компоненты скорости: $V_r = \dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e\sin\vartheta$. Откуда получаем

$$\sin\vartheta_0 = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\dot{r}_0 \to \vartheta_0, \tag{4.6}$$

где $\dot{r}_0 = \frac{1}{r_0}\left(x_0\dot{x}_0 + y_0\dot{y}_0 + z_0\dot{z}_0\right)$.

Для определения аргумента перицентра $\omega$ : $\omega = u_0 - \vartheta_0$ при известном из (4.6) $\vartheta_0$ необходимо найти аргумент широты в начальный момент времени: $u_0$.

Из 3-го уравнения системы (3.6): $z = r\sin u \sin i$ находим

$$\sin u_0 = \frac{z_0}{r_0 \sin i} \to u_0 \tag{4.7}$$

Для нахождения времени $\tau$ прохождения КА через перицентр определяем вначале эксцентрическую аномалию $E_0$:

$$\mathrm{tg}\frac{E_0}{2} = tg\frac{\vartheta_0}{2}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \longrightarrow E_0 \tag{4.8}$$

Затем находим среднюю аномалию эпохи: $M_0 = E_0 - e\sin E_0$ , где $M_0 = n(t_0 - \tau)$; $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ . Тогда

$$\tau = t_0 - \frac{M_0}{n} \tag{4.9}$$

Таким образом, поставленная задача решена.

## 4.2 Определение орбиты по двум фиксированным положениям и времени перелета методом Ламберта – Эйлера

Предложенный во второй половине XVIII в. французским ученым Ж.Ламбертом метод был направлен на определение орбиты небесного тела по двум его положениям. В настоящее время метод Ламберта широко используется для определения орбит КА, если в качестве исходных данных рассматриваются положения КА в начале и в конце полета, задаваемые радиус-векторами $\overline{r_1}$, $\overline{r_2}$ и временем перелета $\Delta t$. Такие данные часто задаются, например, при расчете межпланетных траекторий КА. Система элементов $\overline{r_1}$, $\overline{r_2}$ и $\Delta t$ позволяет полностью определить форму и размеры орбиты, положение ее плоскости в пространстве и положение орбиты в этой плоскости. Однако получение кеплеровских элементов орбиты в этом случае связано с решением трансцендентных уравнений.

Формула Ламберта основывается на аналитической зависимости для площади сектора, образованного радиус-векторами $\overline{r_1}$ и $\overline{r_2}$. Из формулы (2.8):

$h = 2\dfrac{dA}{at}$ получаем $2A = S_{1,2} = h\Delta t$, где $\Delta t = t_2 - t_1$, $S_{1,2} = 2A$ - удвоенная площадь сектора, образованного векторами $\overline{r_1}$ и $\overline{r_2}$. Отсюда, учитывая, что $h = \sqrt{p\mu}$, можем записать:

$$\Delta t = \frac{S_{1,2}}{\sqrt{p\mu}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \frac{S_{1,2}}{a\sqrt{ap}} ,$$

причем для эллипса

$$S_{1,2} = a^2\sqrt{1-e^2}\left[(\varepsilon - \sin\varepsilon) \pm (\delta - \sin\delta)\right], \tag{4.10}$$

где *a, e* – большая полуось и эксцентриситет орбиты;

$\varepsilon$ и $\delta$ - вспомогательные углы, определяемые соотношениями:

$$\sin^2\frac{\varepsilon}{2} = \frac{r_1 + r_2 + S}{4a},\ \sin^2\frac{\delta}{2} = \frac{r_1 + r_2 - S}{4a}, \tag{4.11}$$

где $S$ – длины хорды, соединяющей концы радиус-векторов $\overline{r_1}$ и $\overline{r_2}$.

Длина хорды $S$ в зависимости от $\overline{r_1}$ и $\overline{r_2}$, а также угла перелета $\Phi = \vartheta_2 - \vartheta_1$ определяется по формуле:

$$S = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\Phi} \tag{4.12}$$

Значения углов $\dfrac{\varepsilon}{2}$ и $\dfrac{\delta}{2}$ зависят от взаимного расположения векторов $\overline{r_1}$, $\overline{r_2}$ и фокусов $F_1$ и $F_2$ эллиптической орбиты. В прикладных исследованиях обычно рассматриваются случаи, когда сегмент не содержит второго фокуса $F_2$ (рис.4.1). В этом случае в формуле (4.10) при $\Phi$>180° (случай “*а*”) берется знак “+”, а при $\Phi$<180° (случай “*б*”) – знак “–”.

Величины $\varepsilon$ и $\delta$ однозначно определяются формулами (4.11). При этом $0 < \varepsilon < \pi$, $0 < \delta < \pi$.

Используя (4.10), легко получить формулу Ламберта для эллипса.

$$\Delta t_{\text{элл}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}\left[(\varepsilon - \sin\varepsilon) \pm (\delta - \sin\delta)\right] \tag{4.13}$$

Для гиперболической орбиты формула Ламберта имеет вид:

$$\Delta t_{\text{гип}} = \sqrt{\frac{|a|^3}{\mu}}\left[(\text{sh}\alpha - \alpha) - (\text{sh}\beta - \beta)sign(\sin\Phi)\right] , \tag{4.14}$$

где $\mathrm{sh}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{r_1 + r_2 + S}{4|a|}}$, $\mathrm{sh}\beta = \sqrt{\frac{r_1 + r_2 - S}{4|a|}}$, а $sign(\sin\Phi) = \begin{cases} +1 \text{ при } \sin\Phi > 0 \\ 0 \text{ при } \sin\Phi = 0 \\ -1 \text{ при } \sin\Phi < 0 \end{cases}$.

Для параболической орбиты время перелета выражается уравнением Эйлера [17]

$$\Delta t_{\text{пар}} = \frac{1}{6\sqrt{\mu}}\left[(r_1 + r_2 + S)^{\frac{3}{2}} + (r_1 + r_2 - S)^{\frac{3}{2}} sign(\sin\Phi)\right]. \tag{4.15}$$

Таким образом, для того чтобы найти траекторию перелета между начальным $\bar{r}_1$ и конечным $\bar{r}_2$ радиус-векторами за заданное время $\Delta t = t_2 - t_1$ формулу Ламберта следует рассматривать как уравнение относительно большой полуоси "$a$". При этом сначала следует определить тип орбиты перелета. Очевидно, при одних и тех же граничных условиях $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ имеет место неравенство: $\Delta t_{\text{гип}} < \Delta t_{\text{пар}} < \Delta t_{\text{элл}}$. Поэтому для определения типа орбиты достаточно по формуле (4.15) вычислить $\Delta t_{\text{пар}}$. Если заданное $\Delta t$ удовлетворяет неравенству $\Delta t < \Delta t_{\text{пар}}$, то перелет может быть реализован только по эллиптической орбите. Таким образом, если $\Delta t > \Delta t_{\text{пар}}$, уравнение (4.13) следует рассматривать как уравнение относительно большой полуоси "$a$", причем эта переменная входит в (4.13) как непосредственно, так и через $\varepsilon = \varepsilon(a)$ и $\delta = \delta(a)$. В результате относительно "$a$" имеем трансцендентное уравнение, для решения которого используются современные вычислительные итерационные процедуры. Эти процедуры часто основываются на стандартном обеспечении ЭВМ. В первом приближении можно при итерационном процессе положить $a = a^{(1)} = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$.

Определение большой полуоси "$a$" является первым этапом расчета орбиты методом Ламберта. Далее определяем фокальный параметр "$p$", эксцентриситет "$e$" и истинную аномалию в начальной точке $\vartheta_1$, используя полярное уравнение орбиты:

$$r_1 = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta_1};\; r_2 = \frac{p}{1 + e\cos(\vartheta_1 + \Phi)};\quad p = a(1 - e^2) \quad \longrightarrow \quad p,\ e\ ,\vartheta_1 \tag{4.16}$$

Для решения задачи определения остальных элементов орбиты достаточно найти вектор скорости в начальной точке орбиты $\overline{V_1}$, то есть свести эту задачу к ранее решенной задаче определения орбиты по начальным значениям $\overline{r_1}$ и $\overline{V_1}$. Для скорости $\overline{V_1}$ используем выражение (2.39)

$$\overline{V_1} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r_1 r_2 \sin\Phi}\left\{\overline{r_2} - \left[1 - \frac{r_2}{p}(1-\cos\Phi)\right]\overline{r_1}\right\},$$ откуда зная $\overline{r_1}(x_1, y_1, z_1)$, $\overline{r_2}(x_2, y_2, z_2)$ найдем $\overline{V_1}(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)$.

## 4.3 Круговые орбиты. Сфера действия

На космический аппарат действуют поля тяготения различных тел солнечной системы, и все они влияют на характер орбиты. Возникает вопрос: когда движение КА можно рассматривать в рамках ограниченной задачи двух тел. Для решения этой задачи наибольшее распространение получило понятие сферы действия. Рассмотрим случай, когда на движение КА оказывают влияние гравитационные поля Земли (малого тела) и Солнца (большого тела). Поля тяготения малого и большого небесных тел не только действуют на КА, но и друг на друга (рис.4.2). На рис.4.2 :$m$ – масса КА, $m_З$ – масса Земли, $m_С$ – масса Солнца. Остальные обозначения ясны из рисунка. На основании закона всемирного тяготения можно записать следующие соотношения:

$\overline{a}_б = \dfrac{k^2 m_С}{r_{КС}^3}\overline{r}_{КС}$ – гравитационное ускорение, действующее на КА со стороны большого тела (Солнца);

$\overline{a}_м = -\dfrac{k^2 m_З}{r^3}\overline{r}$ – гравитационное ускорение, действующее на КА со стороны малого тела (Земли);

$\overline{a}_{бм} = \dfrac{k^2 m_С}{r_{ЗС}^3}\overline{r}_{ЗС}$ – гравитационное ускорение, действующее со стороны большого тела на малое;

$\bar{a}_{мб} = -\dfrac{k^2 m_З}{r_{ЗС}^3}\bar{r}_{ЗС}$ – гравитационное ускорение, действующее со стороны малого тела на большое.

Если рассматривать движение КА в системе координат, связанной с малым телом, то траектория его невозмущенного движения определяется ускорением $\bar{a}_м$.

Большое тело будет оказывать возмущающее действие $\bar{\Phi}_{вб} = \bar{a}_м - \bar{a}_{бм}$. Степень возмущающего воздействия большого тела на движение КА относительно малого тела будет зависеть от отношения: $\dfrac{|\bar{\Phi}_{вб}|}{|\bar{a}_м|} = \dfrac{|\bar{a}_б - \bar{a}_{бм}|}{|\bar{a}_м|}$.

Если рассматривать движение КА в СК, связанной с большим небесным телом, то возмущающее воздействие будет оказывать малое тело. При этом возмущающее ускорение будет равно $\bar{\Phi}_{вм} = \bar{a}_м - \bar{a}_{мб}$. Соответствующая степень воздействия определяется аналогично предыдущему случаю как $\dfrac{|\bar{\Phi}_{вм}|}{|\bar{a}_б|} = \dfrac{|\bar{a}_м - \bar{a}_{мб}|}{|\bar{a}_б|}$.

Сферой действия малого небесного тела по отношению к большому небесному телу называют границу области, в пределах которой степень возмущающего воздействия большого тела на движение КА в СК, связанной с малым телом меньше, чем степень возмущающего воздействия малого тела на движение КА в СК, связанной с большим телом. Уравнение сферы действия определяется равенством

$$\frac{|\bar{a}_б - \bar{a}_{бм}|}{|\bar{a}_м|} = \frac{|\bar{a}_м - \bar{a}_{мб}|}{|\bar{a}_б|} \tag{4.17}$$

Решение этого уравнения позволяет найти радиус сферы действия $R_*$:

$$R_* = L\left(\frac{m_м}{m_б}\right)^{2/5}, \tag{4.18}$$

где $L = |\bar{r}_{ЗС}|$.

Для Земли радиус сферы действия $R_*$=0,93 млн.км, для Венеры $R_*$=0,62 млн.км, для Марса $R_*$=0,58 млн.км, для Луны $R_*$=0,066 млн.км.