ГЛАВА 5. ВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ

Описание и изучение орбит КА на основе решения ограниченной задачи двух тел является лишь первым этапом при определении реальных движений тел любой природы. В реальном полете на КА, помимо силы тяготения Земли (при движении в сфере действия Земли) действует ряд других сил, которые нужно учитывать как возмущающие факторы. К этим возмущающим факторам относятся: гравитационные силы, связанные с нецентральностью гравитационного поля Земли; силы притяжения Луны, Солнца, других планет Солнечной системы; аэродинамические силы; давление солнечного света; силы от действия электромагнитного поля Земли и другие факторы.

Все отмеченные факторы приводят к отклонению траектории КА от кеплеровской (идеальной) орбиты. Правда, эти отклонения невелики ввиду относительной малости возмущающих сил. Движение КА с учетом возмущающих факторов будем называть возмущенным. Если рассматривать небольшие участки траектории КА, то возмущения орбиты, как правило, малы и их можно не учитывать. Однако, ряд возмущений имеют тенденцию накапливаться во время полета, что постепенно приводит к значительному отклонению элементов орбиты от их первоначальных значений. Такие возмущения орбиты принято называть вековыми возмущениями орбиты. Вековые возмущения свойственны эллиптическим орбитам, так как полет по ним может продолжаться в течение длительного времени. Гиперболические орбиты возмущаются незначительно, если не считать участков полета, находящихся на больших удалениях от Земли, когда начинает сказываться притяжение со стороны Солнца.

5.1. Общая характеристика возмущений и возмущенного движения

Для описания движения КА в задаче двух тел использовалась система дифференциальных уравнений (2.1) или (2.2). Гравитационное ускорение, входящее в правую часть (2.1) будем называть основным ускорением при исследовании возмущенного движения КА и обозначим $\bar{a} = -\frac{\mu}{r^3}\bar{r}$. Таким образом, невозмущенное движение описывается векторным дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{a} \qquad (5.1)$$

В возмущенном движении учитываются эффекты от возмущающих факторов. Если обозначить $\bar{q}$ – вектор суммарного возмущающего ускорения, то возмущенное движение описывается системой:

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{a} + \bar{q} \qquad (5.2)$$

$$\bar{r} = \bar{r}(x, y, z); \bar{a} = a(a_x, a_y, a_z); q = q(q_x, q_y, q_z).$$

В настоящем разделе исследуются такие траектории КА, на которых возмущающее ускорение существенно меньше основного: $|\bar{q}| << |\bar{a}|$. При этом решение задачи двух тел (невозмущенное движение) может рассматриваться в качестве первого приближения для возмущенного движения. Для создания полной модели возмущенного движения обратимся к описанию возмущающих ускорений, входящих в $\bar{q}$.

5.1.1. Нецентральность гравитационного поля Земли

При решении ограниченной задачи двух тел Земля представляется шаром со сферическим распределением плотности. В действительности (см. раздел 1) Земля представляет собой неоднородное тело вращения, имеющее сложную конфигурацию поверхности. Потенциальная функция поля тяготения такого тела приближенно описывается формулой (1.2). Если рассматривать фигуру Земли как сжатый сфероид, что оказывается достаточным для решения большинства практических задач, то можно использовать формулу (1.3).

$$U = \frac{\mu_3}{r} - \frac{\mu_3\delta}{3r^3}\left(3\sin^2\varphi' - 1\right)$$

Используя формулы сферической тригонометрии (3.2-3.5) для геоцентрической широты φ' получаем выражение:

$$\sin\varphi' = \sin u \sin i\,,$$

где $u -$ аргумент широты, а $i -$ наклонение орбиты. Обозначая $\mu_3\delta = \varepsilon$, получаем для потенциала от эффекта сжатия земного сфероида следующее выражение:

$$U_{\text{сж}} = -\frac{\varepsilon}{r^3}\left(\sin^2 u \sin^2 i - \frac{1}{3}\right) \tag{5.3}$$

Для того чтобы найти проекцию гравитационного ускорения от сжатия земного эллипсоида на какое-либо направление достаточно найти производную от потенциала (5.3) по этому направлению. Нас в дальнейшем будет интересовать направления задаваемые орбитальной системой координат S, T, W. Поэтому находим:

$$\begin{aligned} q_S &\equiv S_1 = \frac{\partial U_{\text{сж}}}{\partial r} = \frac{\varepsilon}{r^4}\left(3\sin^2 i \sin^2 u - 1\right) \\ q_T &\equiv T_1 = \frac{1}{r}\frac{\partial U_{\text{сж}}}{\partial u} = -\frac{\varepsilon}{r^4}\sin^2 i \sin 2u \\ q_W &\equiv W_1 = \frac{1}{r\sin u}\frac{\partial U_{\text{сж}}}{\partial i} = -\frac{\varepsilon}{r^4}\sin 2i \sin u \end{aligned} \tag{5.4}$$

При необходимости можно найти проекции возмущающего ускорения на другие направления, воспользовавшись связью между соответствующими системами координат (таблицами направляющих косинусов).

5.1.2. Возмущения, вызванные сопротивлением атмосферы Земли

На высотах более 150−200 км атмосфера Земли сильно разрежена и поэтому оказывает малое сопротивление движущемуся КА. Но поскольку сила сопротивления является постоянно действующей силой, то она может значительно изменить элементы орбиты.

Аэродинамические силы определяются величиной и ориентацией вектора воздушной скорости КА: $\overline{V}_{\text{в}} = \overline{V} - \overline{V}_{\text{ат}}$, где $\overline{V} -$ скорость движения КА (путевая скорость), $\overline{V}_{\text{ат}} -$ скорость движения атмосферы за счет вращения ее вместе с Землей. Скорость $\overline{V}_{\text{ат}}$ направлена вдоль параллели на восток и определяется формулой:

$$V_{\text{ат}} = \omega_3 r \cos\varphi' , \tag{5.5}$$

где ω_3 – угловая скорость вращения Земли около своей оси, r − радиус-вектор КА относительно центра Земли, φ' − геоцентрическая широта точки орбиты, в которой находится КА.

Выражение для вектора возмущающего аэродинамического ускорения имеет вид:

$$\bar{q}_a = \frac{\bar{X}}{m} = -\frac{C_x \rho S_{\text{м}} V_{\text{в}}^2}{2m} \frac{\bar{V}_{\text{в}}}{V_{\text{в}}} \quad , \tag{5.6}$$

где C_x − коэффициент лобового сопротивления, $S_{\text{м}}$ − площадь миделевого сечения, m − масса КА, ρ − плотность атмосферы.

Для нахождения проекций вектора $\bar{q}_a$ нужно знать проекции вектора воздушной скорости $\bar{V}_{\text{в}}$ на соответствующие оси СК. В первом приближении, учитывая, что влияние вращения атмосферы не превышает 5% влияния полного сопротивления на движение КА, полагают $V_{\text{ат}} \approx 0$. Тогда $\bar{V}_{\text{в}} \approx \bar{V}$. Запишем выражения для проекций вектора $\bar{q}_a$ на оси орбитальной СК *STW*. Обозначим $q_a = \frac{1}{2m} C_x \rho S_{\text{м}} V^2$.Тогда (рис.5.1):

$$q_{aT} \equiv T_a = -q_a \cos\theta_V = -q_a \frac{V_T}{V} \tag{5.7}$$

$$q_{aS} \equiv S_a = -q_a \sin\theta_V = -q_a \frac{V_r}{V} \tag{5.8}$$

Принимая во внимание формулы (2.27) - (2.29) для V_r, V_T, V получаем:

$$q_{aT} \equiv T_a = -q_a \frac{1 + e\cos\vartheta}{\sqrt{1 + 2e\cos\vartheta + e^2}} ;$$

$$q_{aS} \equiv S_a = \frac{-q_a e \sin\vartheta}{\sqrt{1 + 2e\cos\vartheta + e^2}} \tag{5.8$'$}$$

В рассматриваемом приближении $q_{aW} \equiv W_a \approx 0$. Если обозначить $b = \frac{C_x S_{\text{м}}}{m}$ – баллистический коэффициент, то получим [12]:

$$T_a \approx -\frac{1}{2} b\rho V V_T , S_a = -\frac{1}{2} b\rho V V_r , W_a = -\frac{1}{2} b\rho V \omega_3 r \sin i \cos u , \tag{5.9}$$

где $b' = b\left(1 - \frac{\omega_З r_п}{V_{Tп}}\cos i\right); \bar{b} = b\left(1 - \frac{\omega_З r_п}{V_{Tп}}\cos i\right)^2$,

причем $r_п$ – радиус перигея, $V_{Tп}$ – значение скорости в перигее ($V_п = V_{Tп}; V_{r_п} = 0$).

Как видно из формул, баллистические коэффициенты b' и $\bar{b}$ отличаются множителем $\left(1 - \frac{\omega_З r_п}{V_{Tп}}\right)$. Это различие не является существенным, так как $S_a << T_a$. Что касается компоненты W_a, то в отличие от T_a боковая составляющая W_a имеет периодический характер (зависит от $\cos u$). Ее влияние на движение КА незначительно. Поэтому обычно принимают $W_a \approx 0$. Для проведения расчетов в формулы (5.9) нужно подставить V_r, V_T, V из формул (2.27) - (2.29).

5.1.3. Возмущающее действие на КА со стороны Луны и Солнца. Ограниченная задача трех тел и ее прикладные аспекты

Рассмотрим возможный подход к анализу гравитационного возмущения на движение КА со стороны Луны, Солнца или любого другого небесного тела. Частично эта задача рассматривалась при выводе формулы для радиуса сферы действия (см.п.4.3). Пусть рассматривается движение КА с малой (негравитирующей) массой m в системе гравитирующих масс $M_1 >> m$ и $M_2 >> m$. О соотношении масс M_1 и M_2 никаких предположений не делается. Такая задача получила название ограниченной задачи трех тел. Решение этой задачи потребовалось в связи с реализацией в 60-е годы лунной программы и полетов Земля−Луна−Земля. В качестве рассматриваемых трех тел принимались КА, Земля, Луна. Эта задача получила специальное название − ограниченная задача трех тел, впервые ее сформулировал Л.Эйлер в 1772г. Дальнейшие упрощения данной задачи позволили получить интересные качественные результаты. Делаются два допущения: 1) притягивающее тело с меньшей массой движется относительно тела с большой массой по круговой орбите; 2) движение всех трех тел происходит в одной плоскости. Такая упрощенная задача называется ограниченной круговой задачей трех тел. Массу каждого из тел считаем сосредоточенной в его центре масс, что позволяет рассматривать движение материальных точек. При этом материальные точки, соответствующие Луне и Земле, будут двигаться по известным кеплеровским орбитам вокруг общего центра тяжести (барицентра) с равными периодами, определяемыми формулой $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\hat{a}^3}{\hat{\mu}}}$, но величина $\hat{\mu}$ в этой формуле имеет вид $\hat{\mu} = k^2(M_1 + M_2)$, а под $\hat{a}$ − понимается сумма полуосей обеих орбит. Барицентр располагается на линии, соединяющей центры обоих тел, на расстоянии 4670 км от центра Земли.

Для оценки возмущающего влияния массы M_2(Луны) обратимся к следующей схеме (рис.5.2). На этом рисунке $O_u XYZ -$некоторая инерциальная СК. Остальные обозначения ясны из приведенного выше текста. Описание движения массы m (КА) относительно гравитирующей массы M_1(Земли) сводится к составлению дифференциального уравнения относительно радиуса-вектора:

$$\bar{\rho}_1 = \bar{R} - \bar{R}_1 \tag{5.10}$$

Дифференцируя дважды левую и правую часть (5.10), получаем:

$$\frac{d^2\rho_1}{dt^2} = \frac{d^2\bar{R}}{dt^2} - \frac{d^2R_1}{dt^2} \tag{5.11}$$

Ускорение КА в инерционном пространстве: $\dfrac{d^2\bar{R}}{dt^2}$ с учетом действия на КА сил притяжения масс M_1 и M_2 определяется выражением (5.12)

$$\frac{d^2\bar{R}}{dt^2} = -\frac{\mu_1}{\rho_1^3}\bar{\rho}_1 - \frac{\mu_2}{\rho_2^3}\bar{\rho}_2, \tag{5.12}$$

где $\mu_1 = k^2 M_1, \mu_2 = k^2 M_2$−гравитационные параметры тел соответственно с массами M_1 и M_2. Ускорение гравитирующей массы M_1 в инерционном пространстве под действием гравитирующей массы M_2:

$$\frac{d^2\bar{R}_1}{dt^2} = -\frac{\mu_2}{R_{12}^3}R_{12} \tag{5.13}$$

Используя (5.11) − (5.13), получим:

$$\frac{d^2\bar{\rho}_1}{dt^2} = -\frac{\mu_1}{\rho_1^3}\bar{\rho}_1 - \frac{\mu_2}{\rho_2^3}\bar{\rho}_2 - \frac{\mu_2}{R_{12}^3}R_{12} \qquad (5.14)$$

Первое слагаемое в правой части формулы (5.14) определяет ускорение КА в задаче двух тел (M_1,m). Это ускорение было названо выше основным и имело обозначение $\bar{a}$.В данном случае обозначим его буквой $\bar{a}_1$. Индекс “1” подчеркивает, что основное ускорение рассматривается в задаче двух тел (M_1,m), а не тел (M_2,m). Два последних слагаемых в (5.14) определяют возмущающее ускорение $\bar{q}_1$ в задаче двух тел (M_1,m). Это возмущающее ускорение можно рассматривать как разность двух ускорений:

$$\bar{q}_1 = \bar{b}_1 - \bar{c}_1, \qquad (5.15)$$

где

$\bar{b}_1 = -\frac{\mu_2}{\rho^3}\bar{\rho}_2$ – ускорение, которое имеет КА в ограниченной задаче двух тел (M_2,m);

$\bar{c}_1 = -\frac{\mu_2}{R_{12}{}^3}\bar{R}_{12}$ –ускорение, которое имеет масса M_1 в ограниченной задаче двух тел (M_2, M_1), если массу M_1 считать негравитирующей. Таким образом, возмущающее ускорение, действующее на КА, совершающего полет в окрестности Земли от Луны, Солнца или любого другого небесного тела равно разности влияний на КА и Землю со стороны возмущающего тела. С учетом сделанных обозначений уравнение (5.14) перепишем в виде:

$$\frac{d^2\bar{\rho}_1}{dt^2} = \bar{a}_1 + \bar{q}_1 \qquad (5.16)$$

Воспользуемся выведенным выражением для определения возмущающего ускорения, действующего на КА со стороны Луны. Примем допущения в рамках ограниченной круговой задачи трех тел. Дополнительно предположим, что орбита КА с точностью до возмущений круговая. Оценим возмущающее ускорение Луны в нескольких точках орбиты КА (спутник Земли). Рассматриваем точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 (рис.5.3). Ускорение $\bar{c}$ во всех точках одинаково по величине и направлению. Вектор $\bar{b}$ зависит от положения КА на орбите. Вычитание векторов проиллюстрировано в нижней части рис.5.3.

Наибольшая величина возмущающего ускорения $\bar{q}_1$ достигается в точке A_1, так как для этой точки модуль вектора $\bar{\rho}_2$ наименьший, а вектора $\bar{b}$ и $\bar{c}$ в этой точке коллинеарны. Таким образом, получаем:

$$q_{1A_1} = \mu_{\text{Л}} \left[\frac{1}{(R_{12} - \rho_1)^2} - \frac{1}{R_{12}^2} \right],$$

где R_{12} – расстояние Земля-Луна ($R_{12\text{ср}} \approx 384400 км$), $\rho_1 = r_{\text{ИСЗ}}$ – радиус круговой орбиты ИСЗ, $\mu_{\text{Л}} = k^2 M_{\text{Л}} = 4890 \frac{\text{км}^3}{\text{сек}^2}$, $(M_{\text{Л}} \equiv M_2)$ $\mu_{\text{Л}}$ – гравитационный параметр Луны.

Некоторые числовые оценки величины возмущающего ускорения Луны на движение КА представлено в таблице 5.1.

Таблица 5.1.

$\rho_1 = r_{\text{ИСЗ}}$[км]	6600	7000	8000	100000
q_{1A_1}[см/сек^2]	$1{,}17 \cdot 10^{-4}$	$1{,}24 \cdot 10^{-4}$	$1{,}42 \cdot 10^{-4}$	$2{,}75 \cdot 10^{-3}$

Анализ данных табл.5.1 показывает, что величина возмущающего ускорения от Луны для низких спутников мала. Она существенно меньше ускорения от нецентральности гравитационного поля Земли и сопротивления атмосферы Земли.

Оценим влияние притяжения Солнца на движение КА в рамках ограниченной задачи трех тел. Эту оценку будем производить так же как и ранее по формуле (5.15). Но при этом нужно учитывать, что, так как Солнце находится далеко от Земли (см. табл.1.1), радиус-вектор Земля–Солнце ($\bar{R}_{12}$) и радиус-вектор Солнце–КА ($\bar{\rho}_2$) направлены по одной прямой в разные стороны. При этом слагаемые ускорения $\bar{b}$ и $\bar{c}$ в формуле (5.15) будут коллинеарны во всех точках орбиты КА (ИСЗ). На рис.5.4 показана эпюра возмущающего солнечного ускорения на орбите ИСЗ в случае, когда Солнце находится в плоскости орбиты ИСЗ. Максимальное возмущающее ускорение действует на ИСЗ, находящийся в точке A_1. Вектор этого ускорения направлен от Земли радиально вверх. В точках A_2 и A_4 возмущающее ускорение равно нулю. В точке A_3 возмущающее ускорение несколько меньше ускорения в точке A_1 и направлено так же радиально. Если плоскость орбиты ИСЗ перпендикулярна направлению Земля−Солнце, то из (5.15) следует, что возмущающее солнечное ускорение будет равно нулю во всех точках орбиты ИСЗ. Численные оценки величин возмущающих солнечных ускорений показывают, что они меньше лунных примерно в 2,2 раза. Так для орбиты ИСЗ радиусом 100000 км, для случая, когда Солнце находится в плоскости орбиты КА, возмущающее ускорение в точке A_1 (рис.5.4) равно $0{,}83 \cdot 10^{-3}$ см/сек^2.

Рассмотрим один прикладной аспект ограниченной круговой задачи трех тел.

Для этого запишем уравнения плоского движения КА во вращающейся (неинерциальной) СК *Cxyz* с началом в барицентре т.“*C*” системы тел M_1 и M_2 (рис.5.5). Оси системы координат выберем следующим образом: ось *Cx* направлена по прямой, соединяющей M_1 и M_2 в сторону M_2. Ось *Cz* перпендикулярна плоскости движения M_1 и M_2 и образует правую СК *Cxyz*. Введенная СК имеет угловую скорость $\overline{\omega}$ относительно оси *Oz*. Эта угловая скорость постоянна и равна угловой скорости вращения точки M_2 (Луны) по отношению к точке M_1 (Земле) (Луна вращается около Земли по круговой орбите). Во введенной СК уравнения движения КА имеют вид [15]:

$$\begin{aligned}
&\ddot{x} = 2\omega\dot{y} + \omega^2 x + \frac{\mu_1}{\rho_1^3}(x_1 - x) + \frac{\mu_2}{\rho_2^3}(x_2 - x) \\
&\ddot{y} = -2\omega\dot{x} + \omega^2 y - \frac{\mu_1}{\rho_1^3} y - \frac{\mu_2}{\rho_2^3} y \qquad , \\
&\ddot{z} = 0
\end{aligned} \tag{5.17}$$

где слагаемые с $\dot{x}$ и $\dot{y}$ являются компонентами ускорения Кориолиса, слагаемые с ω^2 − компонентами переносного ускорения, а $x_1 = -R_1, x_2 = R_2$.

Введем в рассмотрение функцию следующего вида:

$$U = \frac{1}{2}\omega^2\left(x^2 + y^2\right) + \frac{\mu_1}{\rho_1} + \frac{\mu_2}{\rho_2} \tag{5.18}$$

Тогда система (5.17) с помощью (5.18) запишется в виде:

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial x}; \ddot{y} = -2\omega\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \qquad (5.19)$$

Уравнения (5.19) имеют первый интеграл, называемый интегралом Якоби. Этот интеграл легко получить: умножим первое уравнение системы (5.19) на $2\dot{x}$, второе $2\dot{y}$ и произведем почленное сложение произведений. Получаем:

$$2(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) = 2\left(\frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y}\right) \text{ или } \frac{d}{dt}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = 2\frac{dU}{dt}.$$

Учитывая соотношение $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = V^2$ – квадрат скорости КА во введенной СК (относительной скорости), окончательно получаем

$$V^2 - 2U = -C, \qquad (5.20)$$

где С − константа интегрирования. Константу “С” можно определить по начальным условиям движения : начальной относительной скорости *V* КА и его начальному положению. Линия $2U(x,y) - C = 0$, определяющая область возможных положений КА, где он может находиться при V=0, называется линией Хилла. Она отделяет часть пространства, куда КА, находящийся в поле тяготения двух гравитирующих центров, заведомо попасть не может. Действительно при движении КА имеет место неравенство $V^2 \geq 0$, а значит и $V^2 = 2U - C \geq 0$. В области, где $2U - C < 0$ движение КА принципиально невозможно без увеличения энергии аппарата, например, с помощью включения двигателя. Точки вращающейся плоскости *Cxy*, в которых КА будет находиться неограниченно долго, если его начальная относительная скорость равна нулю, называется точками либрации или точками относительного равновесия. Для ограниченной задачи трех тел существует пять точек либрации. Три из них L_1, L_2, L_3 расположены на одной прямой, соединяющей гравитирующие тела M_1 и M_2 (они называются коллинеарными). Две другие L_4, L_5, так называемые треугольные точки либрации, расположены в вершинах двух правильных треугольников, построенных на отрезке, соединяющем гравитирующие тела. На рис.5.6 нанесены точки либрации. Для системы Земля−Луна в предположении о движении Луны (точка A_2) по окружности с радиусом 384400 км точки либрации характеризуются расстояниями:

$$|A_2L_1| = 58000\text{км}; |A_2L_2| = 65000\text{км}; |A_1L_3| = 380000\text{км};$$
$$|A_1L_{41}| = |A_2L_4| = |A_1L_5| = |A_2L_5| = 384400\text{км}$$

Точки либрации являются частными решениями уравнений ограниченной круговой задачи трех тел (5.19). Можно показать, что треугольные точки либрации при достаточно малых отношениях масс $K = \dfrac{M_2}{M_1 + M_2}$,(K<0,038), являются устойчивыми решениями системы (5.19) (или (5.17)) (для системы Земля−Луна K=1/82,35<0,038). Это означает, что если КА в начальный момент расположен достаточно близко к точке либрации имеет достаточно малую относительную скорость, то с течением времени он останется внутри малой окрестности точки либрации. Коллинеарные точки либрации являются неустойчивыми, то есть при любом сколь угодно малом отклонении КА от точки либрации КА удалится от этих точек на значительное расстояние. Результаты анализа устойчивости треугольных точек либрации подтверждаются астрономическими наблюдениями. Вблизи этих точек обнаружены космические облака (облака Корделевского), по предположению метеорной пыли. Возможно, что в дальнейшем в этих точках будут размещены какие-либо искусственные космические тела [15].

5.1.4. Возмущения, вызванные давлением солнечных лучей

Величина возмущающего ускорения $q_{\text{сд}}$ от светового давления на КА определяется по формуле [6]:

$$q_{\text{сд}} = Kq_{\text{св}}\frac{S_{\text{м}}}{m}, \tag{5.21}$$

где m – масса КА, $S_{\text{м}}$ – площадь миделевого сечения, $q_{\text{св}}$ – сила солнечного давления, K – коэффициент, зависящий от характера отражения света и распределения теплового излучения по поверхности КА (K=1÷1.44). Сила солнечного давления определяется соотношением:

$$q_{св} = q_0\left(\frac{r_l}{r}\right)^2, \tag{5.22}$$

где

q_0 – световое давление на удалении земной орбиты от Солнца, $q_0 = 4.64 * 10^{-6}$ н/м^2;

r_l – средний радиус орбиты Земли;

r – расстояние КА от Солнца.

Вектор $\bar{q}_{сд}$ направлен по световому потоку. Точный расчет сил солнечного давления провести весьма трудно, так как давление существенно зависит от состояния поверхности тела. Солнечное давление имеет смысл учитывать для орбит с высотой перигея выше 400−450 км, так как уже на высоте 400 км доля сил солнечного давления от сил сопротивления атмосферы составляет 7-10% [13]. На высоте 550 км обе силы становятся одинаковы по величине. Особенно ярко проявляется давление солнечного света для легких спутников, двигающихся на больших высотах. Так, например, для спутника “Эхо” (сфера диаметром 30 м, весом 70,4 кг, запуск 12.08.60г., США), имеющего почти круговую орбиту с высотой перигея 1500 км и апогея 1700 км время существования, подсчитанное без учета светового давления составляет 20 лет, а с учетом − 1-2 года. За 60 дней световое давление уменьшает высоту перигея на 350 км.

Орбита вытягивается и постепенно перигей опускается в более плотные слои атмосферы, где из-за сопротивления воздуха спутник быстро снижается.

5.1.5. Сравнение величин возмущающих ускорений от различных факторов

Оценки возмущающих ускорений, проводимые в различных случаях, зависят от большого числа факторов: размер и форма орбиты КА, положение плоскости орбиты в пространстве, положение Луны и Солнца по отношению к орбите и т.д. Сравнительную оценку возмущений в общем случае практически дать невозможно. Для частной оценки рассматривают только круговые орбиты ИСЗ. В этом случае на малых высотах до h=150 км определяющим возмущением является аэродинамическое торможение. На высотах 150−400 км необходимо учитывать аэродинамические возмущения и возмущения, связанные с несферичностью формы Земли. На высотах 400−20000 км нужно прежде всего учитывать возмущения от нецентральности гравитационного поля Земли, а для высот *h*>700 км для легких ИСЗ еще и световое давление. На высотах 20000−50000 км наряду с возмущениями от нецентральности гравитационного поля Земли нужно учитывать лунно солнечные возмущения, действие которых становится превалирующим на высотах более 50000 км.

5.2. Метод оскулирующих элементов

Метод разработан Лагранжем и получил широкое распространение при исследовании возмущенного движения. Сущность метода заключается в том, что возмущенную (истинную) траекторию КА рассматривают состоящей из последовательности невозмущенных траекторий с разными параметрами для каждого текущего момента времени. В итоге траектория возмущенного движения в каждый момент времени соприкасается с траекторией невозмущенного движения для этого же момента времени и представляет собой огибающую семейства невозмущенных траекторий движения. Уравнения возмущенного движения в инерциальной СК *Oxyz* запишем на основании векторного уравнения (5.2) в следующем виде:

$$\ddot{x} = \ddot{x}_0 + q_x; \ddot{y} = \ddot{y}_0 + q_y; \ddot{z} = \ddot{z}_0 + q_z, \tag{5.23}$$

где

$\ddot{x}_0 = a_x = -\dfrac{\mu x}{r^3}; \ddot{y}_0 = a_y = -\dfrac{\mu y}{r^3}; \ddot{z}_0 = a_z = -\dfrac{\mu z}{r^3}$ – составляющие ускорений невозмущенного движения,

q_x, q_y, q_z – составляющие ускорений от возмущающих сил.

Будем считать (см.п.5.1) q_x, q_y, q_z известными функциями времени t координат *x, y, z* и составляющих скоростей $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$:

$$q_x = q_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$
$$q_y = q_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$
$$q_z = q_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

Основная идея метода Лагранжа заключается в том, что решение уравнений возмущенного движения (5.23) определяются теми же формулами (3.6), (3.7) что и решение уравнений невозмущенного движения, но величины кеплеровских элементов орбиты $\Omega, \omega, i, e, p, \tau$ рассматриваются в этих формулах не как постоянные, а как некоторые функции времени, определяемые так, чтобы уравнения возмущенного движения удовлетворялись. С математической точки зрения система (5.23) решается методом вариации произвольных постоянных. В результате осуществление идеи Лагранжа сводится к преобразованию переменных в уравнениях (5.23), причем формулами преобразования служат известные формулы невозмущенного движения. Производя в уравнениях (5.23) подстановку, определяемую формулами (3.6), (3.7) мы получим для новых известных функций – бывших постоянных $\Omega, \omega, i, e, p, \tau$ систему дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dt} &= F_1(\Omega, \omega, i, e, p, \tau) \\
\frac{di}{dt} &= F_2(\Omega, \omega, i, e, p, \tau) \\
\frac{d\omega}{dt} &= F_3(\Omega, \omega, i, e, p, \tau) \\
\frac{dp}{dt} &= F_4(\Omega, \omega, i, e, p, \tau) \\
\frac{de}{dt} &= F_5(\Omega, \omega, i, e, p, \tau) \\
\frac{d\tau}{dt} &= F_6(\Omega, \omega, i, e, p, \tau)
\end{aligned}, \qquad (5.24)$$

где правые части являются известными функциями времени и всех элементов орбиты. Эти уравнения, как и уравнения (5.23) в конечном виде не интегрируются. Преимущество их состоит в том, что при малых возмущающих силах новые переменные $\Omega, \omega, i, e, p, \tau$ изменяются мало и для решения системы (5.24) можно использовать метод итераций, а при использовании численных методов интегрирования это дает надежды на достаточно большой шаг интегрирования при достижении большой точности. Решение системы (5.24) для каждого момента времени дает шесть параметров, определяющих некоторую фиктивную, например, эллиптическую орбиту ("оскулирующий эллипс"). Если в данный момент времени t_1 возмущающие силы перестанут действовать, то дальнейшее движение будет продолжаться по эллипсу, имеющему элементы $p(t_1), e(t_1), \omega(t_1), \Omega(t_1), i(t_1), \tau(t_1)$ и касательному к реальной орбите в точке, где прекратили свое действие возмущающие силы. Реальная орбита является огибающей таких эллипсов. Переменные элементы орбиты $p(t), e(t), \omega(t), \Omega(t), i(t), \tau(t)$ называются оскулирующими элементами. Координаты и скорости КА в инерциальной СК *Oxyz* рассчитываются по тем же формулам (3.6), (3.7), что и для невозмущенного движения, но значение элементов $p, e, \omega, \Omega, i, \tau$, входящих в эти формулы, должны соответствовать данному моменту времени. Приступим к выводу дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов. Изложенный выше прямой путь использования метода Лагранжа приводит к громоздким вычислениям. Можно применить ряд способов, которые позволяют значительно проще получить искомые уравнения.. Рассмотрим основную идею этих способов [10].

Пусть $$F(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, p, e, \omega, \Omega, i, \tau) = 0 \; - \qquad (5.25)$$

есть какой-нибудь из первых интегралов уравнений невозмущенного движения, или соотношение, являющееся следствием из этих интегралов,

где $p, e, \omega, \Omega, i, \tau$ – элементы орбиты, сохраняющие в невозмущенном движении постоянные значения. Тогда в силу уравнений невозмущенного движения мы можем записать следующее тождество:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial F}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\ddot{x}_0 + \frac{\partial F}{\partial y}\ddot{y}_0 + \frac{\partial F}{\partial z}\ddot{z}_0 \equiv 0, \qquad (5.26)$$

где $\ddot{x}_0 = a_x; \ddot{y}_0 = a_y; \ddot{z}_0 = a_z$ - составляющие основного ускорения.

По основной идее метода Лагранжа соотношение вида (5.25) являются также интегралом системы (5.23), но все элементы орбиты $p, e, \omega, \Omega, i, \tau$ должны рассматриваться как функции времени. Поэтому в силу уравнений возмущенного движения (5.23) можно получить следующее тождество:

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial F}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial F}{\partial z}\dot{z}+\frac{\partial F}{\partial \Omega}\dot{\Omega}+\frac{\partial F}{\partial \omega}\dot{\omega}+\frac{\partial F}{\partial i}\dot{i}+\frac{\partial F}{\partial p}\dot{p}+\frac{\partial F}{\partial l}\dot{e}+\frac{\partial F}{\partial \tau}\dot{\tau}$$
$$+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(\ddot{x}_0+q_x\right)+\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\left(\ddot{y}_0+q_y\right)+\frac{\partial F}{\partial \dot{z}}\left(\ddot{z}_0+q_z\right)\equiv 0 \qquad (5.27)$$

Но во всякий момент времени t координаты и скорость КА имеют одинаковые значения и для невозмущенного и для возмущенного движения, а следовательно в момент времени t величины $\frac{\partial F}{\partial t},\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z},\frac{\partial F}{\partial \dot{x}},+\frac{\partial F}{\partial \dot{y}},\frac{\partial F}{\partial \dot{z}},\dot{x},\dot{y},\dot{z},\ddot{x}_0,\ddot{y}_0,\ddot{z}_0$ имеют в соотношениях (5.26) и (5.27) одинаковые значения. Тогда из (5.26) и (5.27) можно записать следующее тождество:

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)=\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}q_x+\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}q_y+\frac{\partial F}{\partial \dot{z}}q_z+\frac{\partial F}{\partial \Omega}\dot{\Omega}+\frac{\partial F}{\partial \omega}\dot{\omega}+\frac{\partial F}{\partial i}\dot{i}+\frac{\partial F}{\partial p}\dot{p}+\frac{\partial F}{\partial l}\dot{e}+\frac{\partial F}{\partial \tau}\dot{\tau}\equiv 0 \qquad (5.28)$$

Тождество (5.28) называется основной операцией. Оно представляет собой соотношение между производными от оскулирующих элементов, самими этими элементами, координатами, составляющими скорости и временем.

Координаты и составляющие скорости можно исключить из (5.28) при помощи формул (3.6),(3.7), так что в результате (5.28) будет представлять собой соотношение только между временем, оскулирующими элементами, и их первыми производными. Каждое такое соотношение линейно относительно производных от оскулирующих элементов. Поэтому, получив достаточное количество формул вида (5.28), можно выразить из них все шесть производных $\frac{d\Omega}{dt}...\frac{d\tau}{dt}$ в зависимости от времени и самих оскулирующих элементов, что и приводит к системе (5.24). Естественно подбирать такие соотношения типа (5.25), которые содержат меньшее число из тринадцати величин – времени, координат, составляющих скорости и оскулирующих элементов. Для большей простоты и наглядности получающихся уравнений вместо составляющих возмущающего ускорения q_x,q_y,q_z введем составляющие того же ускорения на оси орбитальной системы координат O_2STW, связанные с движущейся точкой (КА). При анализе возмущенного движения плоскость O_2ST этой системы координат (см.р.3 табл.3.2) будет совпадать с плоскостью, проходящей через текущий радиус-вектор $\bar{r}$ и вектор скорости $\bar{V}$ в возмущенном движении. Эта плоскость называется оскулирующей плоскостью. Ось O_2W перпендикулярна оскулирующей плоскости и направлена в сторону вектора $\bar{h}$ интеграла площадей.

Используя табл.3.2 направляющих косинусов, можем записать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} q_x &= \alpha S + \alpha' T + \alpha'' W \\ q_y &= \beta S + \beta' T + \beta'' W \\ q_z &= \gamma S + \gamma' T + \gamma'' W \end{aligned} \quad , \tag{5.29}$$

где *S, T, W* – составляющие возмущающего ускорения по осям O_2S, O_2T, O_2W, а буквами α, β, γ обозначены направляющие косинусы соответственно 1-ой, 2-ой и 3-ей строк табл.3.2.

5.2.1 Вывод дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов p, Ω, i

Обратимся к интегралу площадей невозмущенного движения (2.3),(2.4),(2.5) и формулам (4.2). В результате можем записать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} y\dot{z} - z\dot{y} &= \sqrt{p\mu}\sin i \sin\Omega \\ z\dot{x} - x\dot{z} &= -\sqrt{p\mu}\cos\Omega \sin i \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= \sqrt{p\mu}\cos i \end{aligned} \tag{5.30}$$

Применим к каждому из соотношений (5.30) основную операцию (5.28):

$$\begin{aligned} yq_z - zq_y &= \frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}}\frac{dp}{dt}\sin i \sin\Omega + \sqrt{p\mu}\frac{d\Omega}{dt}\sin i \cos\Omega + \sqrt{p\mu}\frac{di}{dt}\sin\Omega\cos i \\ zq_x - xq_z &= -\frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}}\frac{dp}{dt}\sin i \cos\Omega + \sqrt{p\mu}\frac{d\Omega}{dt}\sin i \sin\Omega - \sqrt{p\mu}\frac{di}{dt}\cos\Omega\cos i \\ xq_y - yq_x &= \frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}}\frac{dp}{dt}\cos i - \sqrt{p\mu}\frac{di}{dt}\sin i \end{aligned} \tag{5.31}$$

Разрешая уравнения (5.31) относительно производных от оскулирующих элементов Ω, i, p, получим:

$$\frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}}\frac{dp}{dt}=\left(yq_z-zq_y\right)\sin i\sin\Omega+\left(yq_z-zq_y\right)\sin i\cos\Omega+\left(xq_y-yq_x\right)\cos i$$

$$\sqrt{p\mu}\frac{d\Omega}{dt}\sin i=\left(yq_z-zq_y\right)\cos\Omega-\left(xq_z-zq_x\right)\sin\Omega \qquad (5.32)$$

$$\sqrt{p\mu}\frac{di}{dt}\sin i=\left(yq_z-zq_y\right)\sin i\cos\Omega+\left(xq_z-zq_x\right)\cos\Omega\cos i+\left(yq_x-xq_y\right)\sin i$$

Заменяя в формулах (5.32) координаты x,y,z их выражениями из формул (3.6), а q_x,q_y,q_z из формул (5.29) получим после всех возможных упрощений следующие уравнения:

$$\frac{dp}{dt}=2r\widetilde{T};\frac{d\Omega}{dt}=\frac{r\sin u}{p\sin i}\widetilde{W};\frac{di}{dt}=\frac{r}{p}\cos u\widetilde{W}\ , \qquad (5.33)$$

где $\widetilde{T}=\sqrt{\frac{p}{\mu}}T;\ \widetilde{W}=\sqrt{\frac{p}{\mu}}W;\ \widetilde{S}=\sqrt{\frac{p}{\mu}}S$

Уравнения для оскулирующих элементов ω,e,τ можно получить, анализируя другие первые интегралы уравнений невозмущенного движения [5]. В результате вместе с уравнениями (5.33) получим следующую систему:

$$\begin{aligned}
&1)\frac{dp}{dt}=2r\widetilde{T}\\
&2)\frac{d\Omega}{dt}=\frac{r}{p}\sin u\,\mathrm{cosec}\, i\cdot\widetilde{W}\\
&3)\frac{di}{dt}=\frac{r}{p}\cos u\cdot\widetilde{W}\\
&4)\frac{d\omega}{dt}=-\frac{\cos\vartheta}{e}\widetilde{S}+\frac{\sin\vartheta}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\widetilde{T}-\frac{r}{p}\sin u\,\mathrm{ctg} i\cdot\widetilde{W}\\
&5)\frac{de}{dt}=\sin\vartheta\cdot\widetilde{S}+\left[\cos\vartheta+\left(\cos\vartheta+e\right)\frac{r}{p}\right]\widetilde{T}\\
&6)\frac{d\tau}{dt}=\frac{p}{e}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[\left(eN\sin\vartheta-\cos\vartheta\right)\widetilde{S}+\frac{p}{r}N\widetilde{T}\right]\frac{r^2}{p^2}
\end{aligned}\ , \qquad (5.34)$$

где $N=\frac{2p^2}{r^2}\int\limits_0^{\vartheta}\frac{\cos\vartheta d\vartheta}{\left(1+e\cos\vartheta\right)^3};\ r=\frac{p}{1+e\cos\vartheta};\ u=\vartheta+\omega;\ \widetilde{T}=\sqrt{\frac{p}{\mu}}T;\ \widetilde{W}=\sqrt{\frac{p}{\mu}}W;\ \widetilde{S}=\sqrt{\frac{p}{\mu}}S$,

а истинная аномалия ϑ связана со временем “t” формулой (2.30)

$$t-\tau=\frac{p^2}{h}\int\limits_0^{\vartheta}\frac{d\vartheta}{\left(1+e\cos\vartheta\right)^2};h=\sqrt{p\mu}$$

На величины возмущающих ускорений S,T,W, входящих в уравнения (5.34) не наложено никаких ограничений. Если возмущающие ускорения S,T,W не зависят явно от времени t, то правые части уравнений (5.34) будут функциями только от истинной аномалии и элементов орбиты. Поэтому в системе (5.34) можно исключить время, приняв за независимую переменную ϑ. Можно показать [5,10], что связь между ϑ и "t" определяется соотношением:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\cos\vartheta}{e}\widetilde{S} - \frac{\sin\vartheta}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\widetilde{T} + \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} \tag{5.35}$$

Правая часть соотношения (5.35) также не зависит от "t".

Каждое из уравнений системы (5.34) разделим почлененно на уравнение (5.35). Тогда получим:

$$\begin{aligned}
&1)\ \frac{dp}{d\vartheta} = 2rTF \\
&2)\ \frac{d\Omega}{d\vartheta} = WF\frac{r}{p}\sin u \operatorname{cosec} i \\
&3)\ \frac{di}{d\vartheta} = WF\frac{r}{p}\cos u \\
&4)\ \frac{d\omega}{d\vartheta} = F\left[-S\frac{\cos\vartheta}{e} + T\left(1+\frac{r}{p}\right)\frac{\sin\vartheta}{e} - W\frac{r}{p}ctgi\sin u\right] \\
&5)\ \frac{de}{d\vartheta} = F\left\{S\sin\vartheta + T\left[\left(1+\frac{r}{p}\right)\cos\vartheta + e\frac{r}{p}\right]\right\} \\
&6)\ \frac{d\tau}{d\vartheta} = F\sqrt{\frac{\mu}{p}}\quad ,
\end{aligned} \tag{5.36}$$

где

$$F = \left[\frac{\mu}{r^2} + S\frac{\cos\vartheta}{e} - T\left(1+\frac{r}{p}\right)\frac{\sin\vartheta}{e}\right]^{-1} \tag{5.37}$$

Наряду с системой (5.36) в приложениях часто используется система уравнений при аргументе «u». Эту систему можно получить из системы (5.34), если воспользоваться связью между переменными t и u. Можно показать, что между этими переменными существует соотношение [10, 12]:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \dot{\Omega}\cos i = \frac{\sqrt{\mu p}}{jr^2}\,, \tag{5.38}$$

где $j = \left[1 - \frac{r^3}{\mu p}W\mathrm{ctg}i\sin u\right]^{-1}$

Разделив каждое из первых пяти уравнений системы (5.34) на уравнение (5.38), получим следующую систему для оскулирующих элементов p, Ω, i, ω, e.

1) $\dfrac{dp}{du}=\dfrac{2jr^3}{\mu}T$

2) $\dfrac{d\Omega}{du}=\dfrac{r^3 j}{\mu p}\sin u\,\mathrm{cosec}\, i\cdot W$

$$3)\,\frac{di}{du}=\frac{r^3 j}{\mu p}W\cos u \tag{5.39}$$

4) $\dfrac{d\omega}{du}=\dfrac{r^3 j}{\mu e}\left[\left(1+\dfrac{r}{p}\right)T\sin\vartheta - S\cos\vartheta - e\dfrac{r}{p}W\mathrm{ctg}i\sin u\right]$

5) $\dfrac{de}{du}=\dfrac{r^3 j}{\mu}\left[\left(1+\dfrac{r}{p}\right)T\cos\vartheta + S\sin\vartheta + \dfrac{er}{p}T\right]$

Заметим, что уравнение (5.38) не есть уравнение для оскулирующего элемента, поэтому уравнение $\dfrac{dt}{du}=\dfrac{jr^2}{\sqrt{\mu p}}$ не включено в систему (5.39). Действительно, аргумент широты «u» монотонно изменяется и в невозмущенном движении (S=T=W=0) со скоростью $\dfrac{\sqrt{\mu p}}{r^2}$. Некоторые авторы [12] предлагают рассматривать вместо «u» мало меняющееся отклонение $\bar{u}$ возмущенного «u» от его невозмущенного значения. Основное преимущество оскулирующих элементов – их малая изменяемость сохраняется. Запишем это уравнение. Имеем: $\bar{u}=u-(u)$, где (u) – невозмущенное значение u. Тогда $\dfrac{d\bar{u}}{dt}=\dfrac{du}{dt}-\dfrac{d(u)}{dt}$, причем $\dfrac{d(u)}{dt}=\dfrac{\sqrt{\mu(p)}}{(r)^2}$, где (p), (r) – невозмущенные значения параметра «p» и радиус-вектора «r». Учитывая (5.38), окончательно запишем:

$$\frac{d\bar{u}}{dt}=\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}\left(1-\frac{r^3}{\mu p}W\mathrm{ctg}i\sin u-\frac{r^2}{(r)^2}\sqrt{\frac{(p)}{p}}\right) \tag{5.40}$$

Учитывая (5.38) запишем уравнение (5.40) при аргументе «u»

$$\frac{d\bar{u}}{du}=1-\frac{r^2 j}{\sqrt{p}}\frac{\sqrt{(p)}}{(r)^2} \tag{5.41}$$

Полученные уравнения для оскулирующих элементов интегрируются при известных начальных значениях шести элементов орбиты: p_0, Ω_0, i_0, e_0, ω_0, $\bar{u}_0$. Обратим внимание на то, что правые части всех записанных систем являются линейными функциями от возмущающих ускорений. Если допустить, что возмущения элементов орбиты от каждого возмущающего фактора малы, то можно не учитывать интерференционного воздействия возмущающих факторов между собой на больших отрезках времени [11]. Таким образом, оказывается допустимым рассматривать в отдельности каждый из возмущающих факторов, а общее возмущающее воздействие определять как сумму отдельных возмущающих воздействий. При малых значениях эксцентриситета «*e*» (случай околокруговых орбит), 4-е и 5-у уравнения системы (5.34) (и соответственно других систем) целесообразно заменить следующими уравнениями, исключающими особенность *e*=0.

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[-S\cos u + T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin u + \frac{r}{p}\left(T\lambda_1 - W\lambda_2 \mathrm{ctg} i \sin u\right)\right] \tag{5.42}$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[S\sin u + T\left(1+\frac{r}{p}\right)\cos u + \frac{r}{p}\left(T\lambda_2 + W\lambda_1 \mathrm{ctg} i \sin u\right)\right] \tag{5.43}$$

где $\lambda_1 = l\sin\omega$; $\lambda_2 = l\cos\omega$; $e = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$; $tg\omega = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

Уравнения (5.42) и (5.43) легко выводятся путем дифференцирования выражений для λ_1 и λ_2 и подстановки производных $\frac{de}{dt}$, $\frac{d\omega}{dt}$ из соответствующих уравнений системы (5.34).

Уравнения (5.42) и (5.43) можно использовать для расчета орбит с любыми эксцентриситетами «*e*» (не обязательно близкими к нулю).

5.3 Общий подход к оценке изменений оскулирующих элементов

Ранее было отмечено, что основную роль в отклонениях реальной орбиты КА от идеальной играют нарастающие вековые возмущения, которые могут быть весьма значительными для эллиптических орбит КА, то есть орбит спутников. Однако в некоторых случаях представляет интерес также оценка периодических возмущений орбиты КА.

Удобные приближенные формулы, позволяющие быстро проводить качественный анализ, не прибегая к ЭВМ, оказалось возможным получить с помощью систем (5.34)−(5.39) пользуясь классическими методами небесной механики. Точность этих формул достаточна не только для качественного анализа, но и во многих случаях для определения орбит по результатам измерений. Общую идею одного из используемых методов можно назвать идеей конечных разностей [10]. Поясним эту идею. Рассмотрим один из элементов оскулирующей орбиты E_j. Уравнение для этого элемента, полученное в разделе 5.2, имеет вид:

$$\frac{dE_j}{dt} = f_j\left(E_1,...E_6,t,S,T,W\right) \tag{5.44}$$

Приращение этого элемента орбиты за виток траектории

$$\delta E_j = \int_{t_1}^{t_1+T} \frac{dE_j}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_1+T} f_j\left(E_1,...E_6,t,S,T,W\right) dt \tag{5.45}$$

где t_1 – начальный момент времени, T – период обращения спутника. Оскулирующие элементы $E_1...E_6$, входящие в подинтегральное выражение, можно считать постоянными, соответствующими начальному моменту времени t_1. Интеграл в (5.45) может быть вычислен, если возмущающие ускорения S, T, W выражены через время и элементы орбиты.

В ряде случаев это удается сделать и в результате получить аналитическую запись приращения элемента орбиты за виток траектории:

$$\delta E_j = q_j\left(E_1,...E_6\right) \qquad j=1...6 \tag{5.47}$$

Далее можно организовать итерационный процесс: $E_j = E_{j0} + \delta E_j$ и уточнить полученные значения δE_j. Чтобы не возникало дополнительных трудностей с нахождением периода T, входящего в (5.45) обычно используют систему уравнений при аргументе «u» (5.39). Используя изложенный общий подход, перейдем к анализу влияния отдельных возмущающих факторов.

5.4 Возмущения орбит, вызываемые нецентральностью поля тяготения Земли

Возмущающие ускорения от эффекта сжатия земного эллипсоида определяются формулами (5.4)

$$q_S \equiv S_1 = \frac{\varepsilon}{r^4}\left(3\sin^2 i \sin^2 u - 1\right)$$

$$q_T \equiv T_1 = -\frac{\varepsilon}{r^4}\left(\sin^2 i \sin 2u\right)$$

$$q_W \equiv W_1 = -\frac{\varepsilon}{r^4}\left(\sin 2i \sin u\right)$$

Для исследования влияния возмущений, задаваемых в форме (5.4) используется система дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов при аргументе «u» (5.39). Подстановка возмущающих ускорений S_1, T_1, W_1 в систему (5.39) приводит к системе (5.48).

$$1)\ \frac{dp}{du} = -\frac{2\gamma\varepsilon}{\mu r}\sin 2u \sin^2 i$$

$$2)\ \frac{d\Omega}{du} = -\frac{2\gamma\varepsilon}{\mu p r}\sin^2 u \cos i$$

$$3)\ \frac{di}{du} = -\frac{\gamma\varepsilon}{2\mu p r}\sin 2u \sin 2i \qquad (5.48)$$

$$4)\ \frac{d\omega}{du} = \frac{\gamma\varepsilon}{\mu r^2}\left[-\frac{\cos\vartheta}{e}\left(3\sin^2 u \sin^2 i - 1\right) - \left(1 + \frac{r}{p}\right)\frac{\sin\vartheta}{e}\sin 2u \sin^2 i + \frac{2r}{p}\sin^2 u \cos^2 i\right]$$

$$5)\ \frac{de}{du} = \frac{\gamma\varepsilon}{\mu r^2}\left\{\left(3\sin^2 u \sin^2 i - 1\right)\sin\vartheta - \left[\left(1 + \frac{r}{p}\right)\cos\vartheta + e\frac{r}{p}\right]\sin 2u \sin^2 i\right\},$$

где

$$\gamma = j\big|_{W=W_1} = \left(1 + \frac{2\varepsilon}{\mu p r}\sin^2 u \cos^2 i\right)^{-1} \qquad (5.49)$$

Для любых орбит множитель γ никогда не отклоняется от единицы более чем на ≈0,003 [13]. Такого же порядка ошибки могут произойти вследствие осреднения значений оскулирующих элементов $\Omega \ldots \tau$. Поэтому не имеет смысла усложнять задачу учетом γ, несмотря на то, что в первом приближении этот множитель нетрудно учесть. Примем γ=1 за исключением случаев, оговоренных особо.

При интегрировании 1-го, 3-го, 5-го уравнений за один оборот ИСЗ (в пределах от «u_0» до $u_0+2\pi$) получаем, что вековые уходы элементов p, i, e в первом приближении отсутствуют. Указанные элементы подвержены только периодическим возмущениям. Например, для параметра орбиты «p» из 1-го уравнения системы (5.48) при $\gamma=1$ получаем:

$$\delta p=-\int_{U_0}^{U_0+2\pi}\frac{2\varepsilon}{\mu r}\sin 2u\sin^2 i du=-\frac{2\varepsilon\sin^2 i}{\mu p}\int_0^{2\pi}(1+e\cos\vartheta)\sin 2u du\,.$$

Но $\vartheta=u-\omega$, причем ω=const на витке. Поэтому

$$\delta p=\frac{\varepsilon\sin^2 i}{\mu p}\left\{\cos 2u+e\left[\cos(u+\omega)+\frac{1}{3}\cos(3u-\omega)\right]\right\}_{u=0}^{u=2\pi}=0 \qquad (5.50)$$

Таким образом, фокальный параметр орбиты спутника не имеет вековых возмущений из-за нецентральности гравитационного поля Земли, принимаемой сжатым сфероидом. В течении одного оборота вокруг Земли он (с точностью до эксцентриситета «e») испытывает два полных колебания с амплитудой $A_p=\dfrac{\varepsilon\sin^2 i}{\mu p}$. Амплитуда равна нулю для экваториальных орбит ($p_{экв}$=const, i=0) и имеет максимум для полярных ($i=\pi/2$): $A_{p\max}=\dfrac{\varepsilon}{\mu p}$. Поскольку $\dfrac{\varepsilon}{\mu}=66432{,}78$, а $p_{\min}\approx 6550$ км, то максимальное значение амплитуды для всех орбит $A_{p\max}<10$ км.

Периодическое возмущение эксцентриситета «e» имеет более сложный характер и может быть найдено из 5-го уравнения системы (5.48) [13]

$$\delta e=\frac{\varepsilon}{\mu}\int_0^{2\pi}\frac{(1+e\cos\vartheta)^2}{p^2}\left\{\left(3\sin^2 u\sin^2 i-1\right)\sin\vartheta-\left[\left(1+\frac{1}{1+e\cos\vartheta}\right)\cos\vartheta+e\frac{1}{1+e\cos\vartheta}\right]\sin 2u\sin^2 i\right\}du=$$

$$=\frac{\varepsilon}{\mu p^2}\left\{\begin{array}{l}D_1\cos(u-\omega)+D_2\cos(u+\omega)+D_3\cos(3u-\omega)+\\ e[D_4\cos 2u+D_5\cos 2(u-\omega)+D_6\cos(4u-2\omega)]+\\ e^2[D_7\cos 3(u-\omega)+D_8\cos(u-3\omega)+D_8\cos(5u-3\omega)]\end{array}\right\}_0^{2\pi} \qquad (5.51)$$

где $D_1=-\left(1+\dfrac{e^2}{4}\right)\left(\dfrac{3}{2}\sin^2 i-1\right),\ D_2=\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{11}{4}e^2\right)\sin^2 i,\ D_3=\dfrac{1}{12}\left(7+\dfrac{17}{4}e^2\right)\sin^2 i$,

$D_4=\dfrac{5}{4}\sin^2 i,\ D_5=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\sin^2 i-1\right),\ D_6=\dfrac{3}{8}\sin^2 i,\ D_7=-\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{3}{2}\sin^2 i-1\right),$

$D_8=\dfrac{1}{16}\sin^2 i.$

Формула (5.51) показывает, что вековые отклонения отсутствуют. Периодические колебания (с точностью до «e») происходят с периодом, равным периоду обращения спутника вокруг Земли (две гармоники), и с периодом втрое меньшим.

Амплитуда колебаний зависит от *i* до *ω*.

Чем меньше значение эксцентриситета, тем относительно больше он колеблется. При $e \approx 0{,}001633$ изменения эксцентриситета в течении одного оборота могут достигать 100 %.

Для расчета возмущения полуоси эллипса «*a*» можно воспользоваться формулой, которая получается из соотношения: $p = a\left(1 - e^2\right)$, $a = \dfrac{p}{1 - e^2} = (a) + \delta a$,

$$\delta a = \frac{(p) + \delta p}{1 - \left[(e) + \delta e\right]^2} - (a). \qquad (5.52)$$

В скобках – невозмущенные значения элементов.

Из третьего уравнения системы (5.48) находим возмущение наклонения орбиты спутника:

$$\begin{aligned}\delta i &= -\frac{\varepsilon}{2p^2\mu}\sin 2i\int_0^{2\pi}(1 + e\cos\vartheta)\sin 2u\,du = \\ &= \frac{\varepsilon\sin 2i}{2\mu p^2}\left\{\cos 2u + e\left[\cos(u+\omega) + \frac{1}{3}\cos(3u-\omega)\right]\right\}_0^{2\pi} = 0\end{aligned} \qquad (5.53)$$

$$i = (i) + \delta i$$

Наклонение орбиты в первом приближении, как и параметр орбиты «*p*» не имеет вековых возмущений. За один оборот параметр «*i*» так же, как и «*p*», совершает (с точностью до «*e*») два полных колебания с амплитудой $A_p = \dfrac{\varepsilon\sin\ i}{4\mu p^2}$.

Максимальные значения амплитуды, достигаемое при $i=45^0$ или 135^0 $\mid A_{i\max} \mid = \dfrac{\varepsilon}{4\mu p^2} \approx 0{,}0004$, что соответствует максимальному отклонению спутника в боковом направлении за счет *i*:

0,0004r=0,0004·6550=2,6 км.

Возмущения долготы восходящего узла Ω и аргумента перигея *ω* кроме периодических имеют вековые уходы. Интегрирование 2-го уравнения системы (5.48) в пределах одного витка приводит к следующему выражению:

$$
\begin{aligned}
&\delta\Omega = -\frac{2\varepsilon}{\mu p^2}\cos i\int_0^{2\pi}\sin^2 u(1+e\cos\vartheta)du = \\
&= -\frac{\varepsilon\cos i}{\mu p^2}\left\{u-\frac{1}{2}\sin 2u + e\left[\sin(u-\omega)-\frac{1}{2}\sin(u+\omega)-\frac{1}{6}\sin(3u-\omega)\right]\right\}_0^{2\pi} = \qquad (5.54)\\
&= -\frac{2\pi\varepsilon}{\mu p^2}\cos i
\end{aligned}
$$

$$\Omega = (\Omega) + \delta\Omega .$$

т.е. узел в первом приближении испытывает вековое возмущение, пропорциональное косинусу угла наклонения и обратно пропорциональное квадрату параметра орбиты. За один виток орбиты долгота восходящего угла уменьшается на величину $\frac{2\pi\varepsilon}{\mu p^2}\cos i$. Максимальные уходы Ω соответствуют орбитам, близким к экваториальным ($i \approx 0$; $i \approx \pi$). Для полярной орбиты долгота восходящего узла не имеет вековых возмущений. Периодические возмущения линии узлов имеют второй порядок малости по отношению к вековым возмущениям, поэтому график функции $\delta\Omega = f(u)$ (по крайней мере, за один виток) представляет собой почти прямую линию. Для прямых спутников, имеющих $i < \frac{\pi}{2}$, узел двигается в сторону обратную возрастанию Ω (к западу), для обратных спутников ($i > \frac{\pi}{2}$) – сторону возрастания Ω (к востоку). Это движение определяет поворот плоскости орбиты вокруг оси Земли и называется прецессией узла орбиты. Прецессия узла орбиты (прецессия орбиты) иллюстрируется рис.5.7. Прецессия достигает заметных величин. Так, например, для ИСЗ типа «Восток» суточная прецессия достигает 4^0.

Возмущение аргумента перицентра ω определяется из 4-го уравнения системы (5.48). Интегрирование этого уравнения в пределах одного витка спутника приводит к соотношению:

$$\delta\omega = \int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon}{r^2\mu e}\left[-\cos\vartheta\left(3\sin^2 i\sin^2 u - 1\right) - \sin\vartheta\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin^2 i\sin 2u + e\frac{r}{p}ctgi\sin^2 u\sin 2i\right]du =$$

$$= \frac{\varepsilon}{\mu p^2} \left\{ \begin{matrix} S_0 u + \frac{1}{e}\left[S_1 \sin(u-\omega) + S_2 \sin(u+\omega) + S_3 \sin(3u-\omega)\right] - \left(D_4 - \frac{1}{2}\right)\sin 2u + D_5 \sin 2(u-\omega) + \\ + D_6 \sin(4u - 2\omega) + l\left[D_7 \sin 3(u-\omega) + D_8 \sin(u - 3\omega) + D_8 \sin(5u - 3\omega)\right] \end{matrix} \right\}_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{2\pi\varepsilon}{\mu p^2}\left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right) \qquad (5.55)$$

$$\omega = (\omega) + \delta\omega ,$$

где $S_0 = 2 - \frac{5}{2}\sin^2 i$;

$$S_1 = 1 + \frac{7}{4}e^2 - \left(\frac{3}{2} + \frac{17}{8}e^2\right)\sin^2 i, \;\; S_2 = -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{15}{4}e^2\right)\sin^2 i - \frac{1}{2}e^2,$$

$$S_3 = \frac{1}{12}\left(7 + \frac{19}{4}e^2\right)\sin^2 i - \frac{1}{6}e^2 .$$

Коэффициенты D_4, D_5, D_6, D_7, D_8 были определены в (5.51). То – есть в первом приближении перигей имеет под влиянием сжатия Земли вековой уход, определяемый формулой (5.55).

Основные периодические члены аргумента перигея колеблются так же, как и периодические члены эксцентриситета, но со сдвигом фазы на $\frac{\pi}{2}$. Из формулы (5.55) следует, что при увеличении «p» вековой уход ω уменьшается, что находится в соответствии с законом изменения величины возмущающего ускорения. Действительно, чем дальше от Земли, тем менее заметна неправильность ее формы.

Для полярной орбиты ($i = \frac{\pi}{2}$) вековое возмущение ω за один виток $\delta\omega_{2\pi}$ составляет примерно $4{,}5^0$. Для орбит с наклонением i=$63^0 26'$ имеет место $\delta\omega_{2\pi} \approx 0$, что весьма важно при реализации орбит ИСЗ, для которых по условиям эксплуатации требуется обеспечить постоянство положения апоцентра орбиты. Это необходимо, в частности, для нормального функционирования ИСЗ типа «Молния». Орбита этих спутников имеет наклонение порядка 63^0, т. е. апоцентр располагается в северном полушарии.

Знак приращения $\delta\omega$ зависит от наклонения орбиты i. Если i<$63^0 26'$ или i>$116^0 34'$, то $\delta\omega$>0. Это значит, что линия апсид вращается в ту же сторону, в которую вращается спутник. Если $63^0 26' < i < 116^0 34'$, то $\delta\omega$<0, то есть линия апсид вращается в сторону, противоположную вращению спутника. За виток траектории максимальное смещение линии апсид равно:

$$\max \delta\omega = \frac{4\pi\varepsilon}{\mu p_{\min}^2} \approx 0{,}02\text{рад.}$$

Это соответствует почти 20^0 суточного возмущения линии апсид.

Запишем итоговые равенства для вековых уходов элементов орбиты ИСЗ от сжатия земного эллипсоида за один виток:

$$\begin{aligned} &\frac{dp}{dN} = \frac{de}{dN} = \frac{di}{dN} = 0, \\ &\frac{d\Omega}{dN} = -\frac{2\pi\varepsilon}{\mu p^2}\cos i, \\ &\frac{d\omega}{dN} = \frac{2\pi\varepsilon}{\mu p^2}(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i) \end{aligned} \qquad (5.56)$$

Система уравнений (5.56) дает возможность исследовать вековые уходы оскулирующих элементов по виткам орбиты ИСЗ. Для получения полного возмущения элементов Ω и ω достаточно умножить правую часть (не изменяющуюся от витка к витку траектории) на количество витков N.

Таким образом, получены формулы учитывающие сжатие земного сфероида для элементов эллиптических орбит p, Ω, i, ω, e в зависимости от аргумента широты u.

$$\begin{aligned} &p = (p) + \delta p, \\ &e = (e) + \delta e, \\ &\omega = (\omega) + \delta\omega, \\ &\Omega = (\Omega) + \delta\Omega, \\ &i = (i) + \delta i \end{aligned} \qquad (5.57)$$

В этих формулах в скобках – невозмущенные элементы орбиты, а значения $\delta p, \delta l, \delta\omega, \delta\Omega, \delta i$ как функции «u» определены выше.

Для данного значения u и соответствующих ему элементов орбиты, рассчитанных по этим формулам, можно вычислить координаты x, y, z и скорости $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ (см.п.3.6 и 3.7). При этом ошибка в координатах не должна превышать нескольких десятков метров [13].

Используя уравнения для λ_1 и λ_2 легко получить формулы, пригодные для орбит, близких к круговым (k=$\sin^2 i$) [12]:

$$\delta\lambda_1=\frac{\varepsilon}{\mu p^2}\left\{\left[1-\frac{7}{4}\kappa+\lambda_1^2\left(\frac{1}{4}-\frac{9}{8}\kappa\right)+\lambda_2^2\left(\frac{5}{4}-\frac{9}{8}\kappa\right)\right]\sin u+\left[\frac{7}{12}\kappa+\lambda_1^2\left(-\frac{1}{12}+\frac{23}{48}\kappa\right)+\lambda_2^2\left(-\frac{1}{12}+\frac{13}{48}\kappa\right)\right]\sin 3u\right.$$
$$+\lambda_1\left[\left(-\frac{1}{2}+2\kappa\right)\cos 2u-\frac{3}{8}\kappa\cos 4u\right]+\lambda_2\left[\left(2-\frac{5}{2}\kappa\right)u+\frac{1}{2}\kappa\sin 2u+\frac{3}{8}\kappa\sin 4u\right]+\frac{1}{16}\kappa\left(\lambda_2^2-\lambda_1^2\right)\sin 5u+$$
$$\left.+\lambda_1\lambda_2\left[\left(-2+\frac{13}{4}\kappa\right)\cos u+\frac{5}{24}\kappa\cos 3u-\frac{1}{8}\kappa\cos 5u\right]\right\}. \qquad (5.58)$$

$$\delta\lambda_2=\frac{\varepsilon}{\mu p^2}\left\{\left[1-\frac{5}{4}\kappa+\lambda_1^2\left(\frac{9}{4}-\frac{25}{8}\kappa\right)+\lambda_2^2\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\kappa\right)\right]\cos u+\left[\frac{7}{12}\kappa+\lambda_1^2\left(-\frac{1}{4}+\frac{25}{48}\kappa\right)+\lambda_2^2\left(\frac{1}{12}+\frac{11}{48}\kappa\right)\right]\cos 3u\right.$$
$$+\lambda_1\left[-\left(2-\frac{5}{2}\kappa\right)\sin u+(1-2\kappa)\sin 2u+\frac{3}{8}\kappa\sin 4u\right]+\lambda_2\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\kappa\right)\cos 2u+\frac{3}{8}\kappa\cos 4u\right]+$$
$$\left.\frac{1}{16}\kappa\left(\lambda_2^2-\lambda_1^2\right)\sin 5u+\lambda_1\lambda_2\left[\left(\frac{1}{4}\kappa-1\right)\sin u+\left(\frac{1}{3}-\frac{7}{24}\kappa\right)\sin 3u+\frac{1}{8}\kappa\sin 5u\right]\right\} \qquad (5.59)$$

Элементы λ_1, λ_2 вычисляются по формулам $\lambda_1=(\lambda_1)+\delta\lambda_1$; $\lambda_2=(\lambda_2)+\delta\lambda_2$, где (λ_1), (λ_2) – их невозмущенные значения:

$(\lambda_1)=(e)\sin(\omega)$; $(\lambda_2)=(e)\cos(\omega)$.

Если в формулах для $\delta\Omega$, δi, δp подставить $e=\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}$, $\sin\omega=\dfrac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}$, $\cos\omega=\dfrac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}$, то можно выразить эти возмущения через λ_1 и λ_2:

$$\delta\Omega=-\frac{\varepsilon\cos i}{\mu p^2}\left[u-\frac{1}{2}\sin 2u+\lambda_1\left(-\frac{3}{2}\cos u+\frac{1}{6}\cos 3u\right)+\lambda_2\left(\frac{1}{2}\sin u-\frac{1}{6}\sin 3u\right)\right]; \qquad (5.60)$$

$$\delta i=\frac{\varepsilon\sin 2i}{4\mu p^2}\left[\cos 2u+\lambda_1\left(-\sin u+\frac{1}{3}\sin 3u\right)+\lambda_2\left(\cos u+\frac{1}{3}\cos 3u\right)\right]; \qquad (5.61)$$

$$\delta p=\frac{\varepsilon\sin^2 i}{\mu p}\left[\cos 2u+\lambda_1\left(-\sin u+\frac{1}{3}\sin 3u\right)+\lambda_2\left(\cos u+\frac{1}{3}\cos 3u\right)\right]. \qquad (5.62)$$

В случае круговых орбит ($\lambda_1=\lambda_2=0$) из соотношений (5.58) – (5.62) получаем: ($\kappa=\sin^2 i$); ($p=r$)

$$\delta\lambda_1=\frac{\varepsilon}{\mu p^2}\left[\left(1-\frac{7}{4}\sin^2 i\right)\sin u+\frac{7}{12}\sin^2 i\sin 3u\right]; \qquad (5.63)$$

$$\delta\lambda_2=\frac{\varepsilon}{\mu r^2}\left[\left(1-\frac{5}{4}\sin^2 i\right)\sin u+\frac{7}{12}\sin^2 i\cos 3u\right]; \qquad (5.64)$$

$$\delta\Omega_{\text{кр}}=-\frac{\varepsilon\cos i}{\mu r^2}\left(u-\frac{1}{2}\sin 2u\right) \qquad (5.65)$$

$$\delta i_{\text{кр}}=\frac{\varepsilon\cos 2i}{4\mu r^2}\cos 2u\,; \qquad (5.66)$$

$$\delta p_{\text{кр}} = \frac{\varepsilon \sin^2 i}{\mu r} \cos 2u \,. \tag{5.67}$$

здесь r – радиус невозмущенной круговой орбиты.

Следует отметить, что изменение оскулирующих элементов в возмущенном движении приводит к возмущению радиуса орбиты, а следовательно и высоты полета спутника. Эти возмущения таковы, что происходит как бы частичное «отслеживание» высотой полета поверхности Земли, при этом спутник « поднимается » над экваториальными областями и как бы «проседают» над полюсами. Возмущения радиуса – вектора можно определить по формуле:

$$\delta r = \frac{(p) + \delta p}{1 + [(e) + \delta e]\cos[(u) + \delta u - (\omega) - 8\omega]} - (r) \tag{5.68}$$

где $(r) = \dfrac{(p)}{1 + (e)\cos[(u) - (\omega)]}$ (в скобках – невозмущенные значения).

Очевидно: $(u) = (\omega) + (\vartheta), tg\dfrac{(\vartheta)}{2} = \sqrt{\dfrac{1+(e)}{1-(e)}} tg\dfrac{(E)}{2}$,

$(E) - (e)\sin(E) - (E_0) + (e)\sin(E_0) + (e)\sin(E_0) = \sqrt{\mu}(a)^{-\frac{3}{2}}(t - t_0)$,

где t_0 – начальный момент времени; (E_0) – соответствующее величине t_0 – начальное значение эксцентрической аномалии (невозмущенной) $\delta u \equiv \overline{u}$ (определяется уравнением 5.41).

Высота полета h=r–R, где $R = \overline{a}\left(1 - \alpha \sin^2 i \sin^2 u\right)$ – радиус Земли, $\overline{a}$ – радиус экватора, $\alpha = \dfrac{1}{298{,}3}$ – сжатие Земли. Максимальное изменение радиуса орбиты, из-за эффекта сжатия Земли, рассчитанное по формуле (5.68), не превышает 200 м.

Отклонение времени полета

Расчет времени в зависимости от действия возмущающих факторов проводится на основании уравнения (5.38), которое перепишем в виде:

$$\frac{dt}{du} = \frac{jr^2}{\sqrt{\mu p}} \tag{5.70}$$

где $j=\left[1-\frac{r^3}{\mu p}\mathrm{ctg}\,i\sin uW\right]^{-1}$. Заменяя W по формуле (5.4): $W=W_1=-\frac{\varepsilon}{r^4}\sin 2i\sin u$ и интегрируя (5.70) получим:

$$t-t_0=\int\limits_{u_0}^{u}\frac{r^2du}{\sqrt{\mu p}\left(1+\frac{2\varepsilon}{\mu pr}\cos^2 i\sin^2 u\right)} \tag{5.71}$$

В случае невозмущенного движения ε=0, p= const, e= const, поэтому для времени полета получаем известное уравнение Кеплера (см. выше).

$$E-e\sin E-E_0+e\sin E_0=\sqrt{\mu}a^{-\frac{3}{2}}(t-t_0) \tag{5.72}$$

Различия во времени t, подсчитанном по формулам (5.71) и (5.72) составляет несколько секунд на виток. Для орбит с небольшими эксцентриситетами, но при $e\neq0$ на основании формул (5.70) и (5.71) можно получить конечную формулу для расчета времени [13]. Разложив в ряд по ω, p, e, ε_1 $\left(\varepsilon_1=-\frac{2\varepsilon}{\mu pr}\cos^2 i\sin^2 u\right)$ формулу (5.70) и оставив только линейные члены, получим (отбросив невозмущенную часть dt/du)

$$\frac{d\bar{t}}{du}=\frac{3r^2}{2p\sqrt{\mu p}}\Delta p-\frac{2r^3}{p\sqrt{\mu p}}\cos\vartheta\Delta e-\frac{2r^3e}{p\sqrt{\mu p}}\sin\vartheta\Delta\omega-\frac{2r\varepsilon_1}{(\mu p)^{3/2}}\cos^2 i\sin^2 u \tag{5.73}$$

Далее, заменим $\Delta p=\delta p$, $\Delta e=\delta e$, $\Delta\omega=\delta\omega$ их значениями из формул (5.50), (5.51), (5.55), учтем, что $r=\frac{p}{1+e\cos\vartheta}\approx p(1-e\cos\vartheta)$ и отбросим члены, содержащие e^2.

Интегрируя получившееся после указанных подстановок уравнение (5.73) получим:

$$\overline{\delta t}=\frac{\varepsilon}{\mu\sqrt{\mu p}}\left[\left(1-4\cos^2 i\right)u+\left(\frac{1}{2}-\frac{7}{12}\kappa\right)\sin 2u+e\left[\frac{1}{8}\kappa\sin(u+\omega)+\left(\frac{5}{12}\kappa-\frac{1}{2}\right)\sin(3u-\omega)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(2-\frac{7}{2}\kappa+\frac{3}{4}\cos 2\omega\right)\sin\vartheta-\left(1-5\cos^2 i\right)u\cos\vartheta-\frac{3}{8}\kappa\sin(u-3\omega)\right]\right]_{u_0}^{u} \tag{5.74}$$

($\kappa=\sin^2 u$). Для больших значений «e» можно также получить расчетную формулу, если выражение (5.71) представить следующим образом:

$$t-t_0=\int\limits_{u_0}^{u}\frac{r^2du}{\sqrt{\mu p}\left(1+\dfrac{2\varepsilon}{\mu pr}\cos^2 i\sin^2 u\right)}=\int\limits_{u_0}^{u}F(u)du=$$

$$=\int\limits_{u_0}^{u}\left[F_0+\left(\frac{dF}{dp}\right)_0\Delta p+\left(\frac{dF}{dl}\right)_0\Delta l+\left(\frac{dF}{d\varpi}\right)_0\Delta\omega+\left(\frac{dF}{d\varepsilon_1}\right)_0\varepsilon_1\right]du\,, \qquad (5.75)$$

где $F_0=\dfrac{p^2}{\sqrt{\mu p}\,[1+e\cos(u-\omega)]^2}=\left(\dfrac{dF}{d\varepsilon_1}\right)_0$; $\quad\left(\dfrac{dF}{dp}\right)_0=\dfrac{3\sqrt{p}}{2\sqrt{\mu}\,[1+e\cos(u-\omega)]^2}$;

$\left(\dfrac{dF}{de}\right)_0=1-\dfrac{2p\sqrt{p}\cos(u-\omega)}{\sqrt{\mu}\,[1+e\cos(u-\omega)]^3}$; $\quad\left(\dfrac{dF}{d\omega}\right)_0=1-\dfrac{2p\sqrt{p}e\sin(u-\omega)}{\sqrt{\mu}\,[1+e\cos(u-\omega)]^3}$;

$\varepsilon_1=-\dfrac{2\varepsilon}{\mu pr}\cos^2 i\sin^2 u$.

Значения элементов орбиты p, e, ω берем невозмущенные, т. е. (p), (e), (ω). Заменяя в формуле (5.75) величины $\Delta p=\delta p$, $\Delta e=\delta e$, $\Delta\omega=\delta\omega$ из (5.50), (5.51) и (5.55) соответственно, после интегрирования имеем:

$$\overline{\delta t}=$$

$$=\frac{2\varepsilon}{\mu\sqrt{\mu p}\left(1-e^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left[-\left(D_5+\frac{3}{2}D_5e^2+\frac{9}{16}\kappa e^2\cos 2\omega\right)E+\left(S_4+S_5\cos 2\omega\right)\sin E+\left(S_6+S_7\cos 2\omega\right)\sin 2E\right]+$$

$$+\left(1-e^2\right)^{\frac{1}{2}}\left[-\frac{1}{2}S_0u+\frac{1}{4}\sin 2\omega\left(\frac{13}{12}\kappa-1-\frac{\kappa}{e^2}+\frac{2}{3e^2}\right)\right](1-e\cos E)^2+ \qquad (5.76)$$

$$+\frac{\kappa\sin 2\omega}{6e^2}(1-e\cos E)+\frac{1-\kappa}{3e}\sin(u+\omega)\Big|_{u_0}^{u}$$

где $S_4=-\kappa e+\dfrac{1}{2}e+\dfrac{7}{6}e^2-\dfrac{3}{2}\kappa e^3$; $\quad S_5=\dfrac{19}{24}\kappa e^3-\dfrac{1}{2}e^3-\dfrac{3}{8}\kappa e-\dfrac{1}{3e}+\dfrac{\kappa}{3e}$;

$S_6=\left(\dfrac{5}{24}-\dfrac{3}{16}\kappa-\dfrac{5}{12}e^2+\dfrac{1}{2}\kappa e^2\right)e^2$; $\quad S_7=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{4}\kappa-\dfrac{1}{3}e^2+\dfrac{19}{48}\kappa e^2+\dfrac{1}{6}e^4-\dfrac{1}{3}\kappa e^4\right)$.

($\kappa=\sin^2 i$)

Остальные коэффициенты S_i, а также D_i приведены выше.

В формулах (5.74) и (5.76) рассчитывается дополнительное время, которое затрачивает спутник на полет от точки u_0, (если $u_0=0$, то от экватора), до точки с аргументом широты «u» по сравнению с временем полета по невозмущенной орбите. Полное время полета будет (5.77) $t=\bar{t}+\delta t$, где $\bar{t}\equiv(t)$ - время полета по невозмущенной орбите.

Если в формулу (5.76) подставить $u=2\pi$, то дополнительное время полета на витке орбиты (вековой член)будет при $u_0=0$.

$$\overline{\delta t}_{2\pi} = \delta\overline{T} =$$

$$\frac{2\pi}{\mu\sqrt{\mu p}\left(1-e^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left[\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\left(\frac{3}{2}\sin^2 i-1\right)-\frac{9}{8}e^2\sin^2 i\cos 2\omega+\left(1-e^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{5}{2}\sin^2 i-2\right)\left(1-e\cos E_0\right)^2\right], \tag{5.77}$$

где E_0 – значение эксцентрической аномалии, соответствующее u_0=0:

$$E_0 = -2arctg\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}tg\frac{\omega}{2}.$$

Подставляя в формулу (5.74) $u = 2\pi$ и u_0=0 и выделяя соответствующий вековой член, получим

$$\delta\overline{T} = \frac{2\pi\varepsilon}{\mu\sqrt{p\mu}}\left[-\left(4\cos^2 i-1\right)+e\left(5\cos^2 i-1\right)\cos\omega\right]. \tag{5.78}$$

Величина δT, полученная по формуле (5.77) или (5.78) представляет собой разность между драконическим периодом обращения спутника и периодом обращения по невозмущенной орбите. Драконическим периодом обращения $T_д$ называется время между двумя последовательными прохождениями спутником плоскости экватора

$$T_д = T + \delta\overline{T}, \tag{5.79}$$

где $\overline{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}(a)^{\frac{3}{2}}$ – период для невозмущенной орбиты, а δT, определяемая (5.77) или (5.78) определяет приращение периода за счет сжатия земного сфероида. Если в формуле (5.78) пренебречь членами порядка «e», то приравнивая скобку ($4\cos^2 i$-1) нулю, найдем наклонение орбиты «i» при котором $\delta\overline{T} = 0$, т. е. $T_д$=T: $4\cos^2 i$-1=0; $\cos i = \pm 0{,}5$; i=60^0 или 120^0.

Подсчет возмущения периода $\delta\overline{T}$ на витке круговой орбиты малой высоты с r=6600 км и наклонением i≈0 приводит к результату:

$$\delta\overline{T} \approx \frac{2\pi\varepsilon}{\mu\sqrt{\mu p}}\left(-4\cos^2 i+1\right) = -24{,}36 \text{ сек.}$$

Период невозмущенной орбиты такого спутника T равен 5333,4 сек ≈ 90 мин. Таким образом, возмущение периода составляет 0,45% от периода невозмущенной орбиты. На больших временных интервалах такое малое возмущение приходится учитывать.

Заметим, что если производить расчет драконического периода с точностью до $j=\gamma=1$, как это делалось при анализе вековых уходов оскулирующих элементов, то получим:

$T_{д} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{jr^2}{\sqrt{p\mu}} du = \int\limits_0^{2\pi} \frac{jp^2 du}{\sqrt{p\mu}\left[1+e\cos(u-\omega)\right]^2} = T$, если j=1. Т.е. при j=1 драконический период будет равен периоду обращения спутника в невозмущенном движении:

$T_{д} \approx T = 2\pi \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}$, где $a = \frac{p}{1-e^2}$.

Так как фокальный параметр «*p*» и эксцентриситет «*e*» не имеют вековых уходов, то и большая полуось «*a*» также не имеет вековых уходов и с точностью до j=1 можно утверждать, что драконический период спутника для случая действия возмущения от сжатия Земли постоянен. Однако ранее мы показали, что такое рассмотрение является недостаточным, особенно для продолжительных интервалов времени движения спутника.

5.5. Возмущения, вызываемые сопротивлением атмосферы

В соответствии с рассмотренной в разделе 5.1 моделью возмущающего ускорения, вызванного аэродинамическими силами, проекции возмущающего ускорения определяются формулами (5.8’) или в более сложном варианте (5.9). Будем использовать формулы (5.8’):

$$T = T_a = -\frac{1}{2} b\rho V V_T \quad ; \qquad S = S_a = -\frac{1}{2} b\rho V V_r ; \qquad W_a \approx 0 .$$

Для использования влияния атмосферы эти ускорения нужно подставить в одну из приведенных выше систем уравнений для оскулирующих элементов орбиты. Воспользуемся системой (5.39) при аргументе «*u*». В этом случае при принятой модели возмущения (5.8’) будем иметь: (j=1).

1) $\frac{dp}{du} = -\frac{b\rho V V_T}{\mu} r^3$;

2) $\frac{de}{du} = -\frac{b\rho V r^2}{2\mu}[V_r \sin\vartheta + V_T\left(1+\frac{r}{p}\right)\cos\vartheta + \frac{er}{p}V_T]$; (5.80)

3) $\frac{d\omega}{du}=-\frac{b\rho Vr^2}{2\mu l}\left[-V_r\cos\vartheta+V_T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin\vartheta\right].$

$\frac{d\Omega}{du}=0$, $\frac{di}{du}=0$, $r=\frac{p}{1+e\cos\vartheta}$.

Третье уравнение системы (5.80), определяющее изменение аргумента перицентра можно не рассматривать, так как внутри витка ω меняется слабо. Тогда можно принять ω=const и $du=d\vartheta+d\omega\approx d\vartheta$. Подставляя значения V_r, V_T, V из формул (2.27) – (2.29) и интегрируя в пределах одного витка, можем записать следующие уравнения:

$$\delta p=-bp^2\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{1+2e\cos\vartheta+e^2}}{(1+e\cos\vartheta)^2}\rho d\vartheta;$$

$$\delta e=-bp\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{1+2e\cos\vartheta+e^2}\,(e+\cos\vartheta)}{(1+e\cos\vartheta)^2}\rho d\vartheta. \tag{5.81}$$

Полученные приращения оскулирующих элементов p и e в пределах одного витка могут быть приняты, как указывалось выше, за производные от этих элементов по числу оборотов N:

$$\delta p=\frac{dp}{dN};\qquad \delta e=\frac{de}{dN}.$$

Приращения других элементов орбиты, зависящих только от «p», «e» можно определить по известным формулам эллиптической теории. Например, приращения (или производные по числу витков N) большой полуоси «a», периода i, а также высот перигея и апогея $r_П$ и $r_А$ рассчитываются по формулам:

Так как $a=\frac{p}{1-e^2}$, $T=2\pi\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}$, $r_n=\frac{p}{1+e}$, $r_a=\frac{p}{1-e}$, то $\delta a=\frac{p}{1-e^2}\left(\frac{\delta p}{p}+\frac{2e}{1-e^2}\delta e\right)$;

$$\delta T=\frac{3\pi}{\sqrt{\mu}}a^{\frac{1}{2}}\delta a=\frac{3\pi}{\sqrt{\mu}}\frac{p^{\frac{3}{2}}}{\left(1-e^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\delta p}{p}+\frac{2e}{1-e^2}\delta e\right) \tag{5.82}$$

$$\delta r_n=\frac{p}{(1+e)}\left(\frac{\delta p}{p}-\frac{\delta e}{1+e}\right);\quad \delta r_a=\frac{p}{(1-e)}\left(\frac{\delta p}{p}+\frac{\delta e}{1-e}\right).$$

Для расчета по формулам (5.81), (5.82) нужно ввести зависимость для плотности атмосферы. Нас интересует верхняя атмосфера от 110-130 км (ниже спутник существовать не может). Существует несколько моделей атмосферы. Различные модели атмосферы, найденные разными авторами в различное время, имеют общий характер. В диапазоне высот от 130 км до 400-500 все кривые $\ln\rho(h)$ имеют в районе 150 км наибольшую кривизну; с высотой кривые постепенно выпрямляются и к 400 – 500 км наклон их почти не меняется [12]. Это позволяет в качестве аппроксимирующей функции для $\ln\rho(h)$ выбрать квадратную параболу с вершиной в области низких высот:

$$\ln\rho = \overline{a_0} - \bar{\theta}\sqrt{h - \overline{h_0}} \tag{5.83}$$

где h – высота над уровнем моря; $\overline{a_0}, \bar{\theta}, \overline{h_0}$ - постоянные коэффициенты для данной модели атмосферы.

В табл.5.1 приведены значения коэффициентов $\overline{a_0}, \bar{\theta}, \overline{h_0}$ для различных моделей атмосферы.

Таблица 5.1.

Модель М-1	Высот h, км	ВСА-60 Модель М-2	Высота h, км	ARDC-59 Модель М-3	Высота h, км
$\overline{a_0} = -20{,}051$ $\overline{h_0} = 125700$ $\bar{\theta} = 0{,}01449$	130 – – 400	$\overline{a_0} = -17{,}961$ $\overline{h_0} = 103030$ $\bar{\theta} = 0{,}018844$	140 – – 200	$\overline{a_0} = -19{,}023$ $\overline{h_0} = 104000$ $\bar{\theta} = 0{,}01594$	140 – – 700

Наиболее распространенной аппроксимацией для ρ, которая встречается в литературе, является показательный закон (см. также разд.1).

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{h-h_0}{H}} \tag{5.84}$$

где ρ_0 – значение плотности на некоторой опорной высоте h_0, H – высота однородной атмосферы, $\left(H = \dfrac{kT}{\bar{m}g}\right)$; T – температура ^0K; $\bar{m}$ – молекулярный вес; k – постоянная Больцмана.

Из формулы (5.84) следует, что H можно рассматривать как производную, т.е. $H = -\dfrac{dh}{d\ln\rho}$. С другой стороны на основании (5.83) получаем $\dfrac{dh}{d\ln\rho} = -\dfrac{2}{\bar{\theta}}\sqrt{h - \overline{h_0}}$, откуда

$$H = \frac{2}{\overline{\theta}}\sqrt{h - \overline{h_0}} \qquad (5.85)$$

Для модели М-1, в диапазоне высот от 140 км до 400 км величина H возрастает от 18 до 72 км. Зависимость весьма резкая и нелинейная. Поэтому аппроксимация плотности функцией (5.84) при постоянной H не может обладать необходимой точностью. В то же время для получения качественных оценок экспоненциальный закон (5.84) вполне себя оправдал [12].

Для определения баллистического коэффициента $b = \frac{C_z S_м}{m}$ нужно знать коэффициент лобового сопротивления C_x и площадь миделя спутника. На больших высотах длина свободного пробега молекул воздуха соизмерима или даже превосходит размеры КА. Поэтому величина C_x практически не зависит от формы КА, но зависит от характера отражения частиц от его корпуса. Для большинства современных КА значение C_x лежит в пределах 2−2,5. Наиболее часто используется значение $C_x = 2.2$. Величина $S_м$ в случае неориентируемого спутника в среднем в течении больших промежутков времени может быть принята постоянной и равной примерно $1/4$ величины полной поверхности тела [13]. Для ориентированного КА величину миделева сечения необходимо рассчитывать в соответствии с его ориентацией относительно набегающего потока.

Интегралы (5.81) могут быть вычислены, если использовать разложения в ряды подынтегральных функций. Соответствующие приближенные зависимости приводятся в [12]. Для круговых орбит оценки вековых уходов оскулирующих принимают достаточно простой вид:

$$\begin{aligned} \delta p &= \frac{dp}{dN} = -2\pi b a^2 \rho_П = \delta a \\ \delta e &= \frac{de}{dN} = 0 \\ \delta T &= \frac{dT}{dN} = -\frac{6\pi^2}{\sqrt{\mu}} b a^{\frac{5}{2}} \rho_П \end{aligned} \qquad (5.86)$$

где $\rho_п$ – плотность в перигее оскулирующей орбиты $a = p$ – радиус круговой орбиты. Из формул (5.81) следует, что вековые приращения фокального параметра «p» и эксцентриситета «e» имеют отрицательный характер: p и e уменьшаются.

Аэродинамическое сопротивление, совершая работу, уменьшает энергию спутника. Спутник переходит на все более низкие орбиты (уменьшение p), причем сама орбита с течением времени приближается к круговой (уменьшение e) Период обращения монотонно уменьшается, а средняя скорость полета возрастает. Максимальная скорость уменьшения высоты приходится на район апогея, а минимальная на район перигея орбиты Последнее объясняется тем, что основное торможение спутника происходит в перигее орбиты (большие скорости и маленькая высота). Уменьшение кинетической энергия в перигее преобразуется в соответствующее уменьшение высоты. В апогее после тяготения более слабое, чем в перигее. Поэтому даже если бы уменьшение кинетической энергии в перигее и апогее было одинаковым, высота в апогее изменялась бы скорее. Это обстоятельство дополнительно способствует более быстрому уменьшению высоты в апогее.

5.6 Возмущения орбиты ИСЗ, вызываемые влиянием Луны и Солнца

Возмущающее ускорение вызванное влиянием Луны и Солнца достаточно полно описано в разд.5.1 в рамках общего подхода к анализу вековых возмущений с помощью одной из систем уравнений для оскулирующих элементов (5.34),(5.36),(5.39) необходимо получить проекции для возмущенных ускорений на орбитальные оси. Эти проекции найдем отдельно для каждого возмущающего тела, а общий эффект возмущения найдем как сумму отдельных возмущений. Для описания возмущенного движения в рассматриваемом случае, следуя [12] примем в качестве опорной плоскости инерциальной СК $Oxyz$ плоскость орбиты возмущающего тела M_j (j=1,2).

Именно от этой плоскости (а не от плоскости экватора Земли) в этом разделе будем измерять наклонение i и другие элементы орбиты спутника. Для получения возмущений элементов орбиты в экваториальной СК придется прибавить к тригонометрическим преобразованиям. Положение радиуса–вектора возмущающегося тела M_j показано на рис.5.8. На этом рисунке т.A – спутник , т.D – возмущающее тело, т.O центр Земли, xy – плоскость движения возмущающегося тела, BAE – плоскость движения ИСЗ. Угол $xob = \Omega -$ долгота восходящего узла орбиты ИСЗ относительно плоскости орбиты возмущающегося тела. Угол $DBA = i$–наклонение орбиты ИСЗ относительно плоскости орбиты возмущающегося тела. Угол $BOD = \eta$ определяет положение возмущающегося тела относительно восходящего узла орбиты ИСЗ. Угол $DOA = \varphi$ определяет положение ИСЗ относительно возмущающегося тела. Заметим, что сферический треугольник ABD в общем случае не прямоугольный. Положение плоскости AOD определяется положением ИСЗ и возмущающего тела. Возмущающее ускорение $\bar{q}_j$ принадлежит плоскости DOA, в которой в данный момент находится ИСЗ и возмущающее тело. Это следует (см.разд.5.1) из выражения $\bar{q}_j = \bar{b} - \bar{c}$ (5.15), так как вектор $\bar{b}$ направлен по радиусу-вектору «возмущающее тело – ИСЗ», а вектор $\bar{c}$ направлен по прямой OD (см.рис.5.3) Разложим вектор $\bar{q}_j$ на две составляющие, из которых первая S_j совпадает с направлением $\bar{r}$, а вторая P_j перпендикулярна $\bar{r}$ и лежит в плоскости OAD. В работе [12] показано, что эти компоненты определяются следующими формулами:

$$S_j \approx k^2 M_j \frac{r}{r_j^3}(3\cos^2\varphi_j - 1) \tag{5.87}$$

$$P_j \approx 3k^2 M_j \frac{r}{r_j^3}\cos\varphi_j \sin\varphi_j \tag{5.88}$$

где $k^2 M_j = \mu_j -$ гравитационный параметр j-того возмущающегося тела, $r -$ радиус-вектор ИСЗ, $r_j -$ радиус–вектор возмущающегося тела (j=1,2). Составляющие T_j и W_j возмущающегося ускорения j-ого тела по осям орбитально СК O_2STW определятся формулами: (рис.5.8)

$$T_j = P_j \cos\delta_j,\ W_j = P_j \sin\delta_j \tag{5.89}$$

Используя формулы сферической тригонометрии (см. раздел *3.3*) из треугольника BAD получим

$$\begin{aligned} &\sin\delta_j \sin\varphi_j = \sin\eta_j \sin i_j \\ &\cos\delta_j \sin\varphi_j = \cos u_j \cos\eta_j - \cos u_j \sin\eta_j \cos i_j \\ &\cos\varphi_j = \cos u_j \cos\eta_j + \sin u_j \sin\eta_j \cos i_j \end{aligned} \tag{5.90}$$

Здесь везде индекс "*j*" характеризует возмущенное тело, u_j – аргумент широты спутника относительно плоскости орбиты возмущающегося тела (угол BOA на рис 5.8) С учетом (5.87), (5.88), (5.89), (5.90) найдем :

$$\begin{aligned} &S_j = \mu_j \frac{r}{r_j^3}(3\cos^2\varphi_j - 1) \\ &T_j = -3\mu_j \frac{r}{r_j^3}\cos\varphi_j(\cos\eta_j \sin u_j - \cos u_j \sin\eta_j \cos i_j) \\ &W_j = 3\mu_j \frac{r}{r_j^3}\sin i_j \sin\eta_j \cos\varphi_j \end{aligned} \tag{5.91}$$

Из этих уравнений следует исключить $\cos\varphi_j$ с помощью последнего соотношения (5.90).

Уравнения, определяющие в первом приближении изменения оскулирующих элементов, после использования формул (5.91) в векторном виде будут иметь вид:

$$\frac{dE}{dt} = f(E^{\text{т}}, \vartheta, \eta), \text{ где } E = \begin{pmatrix} p \\ \Omega \\ e \\ i \\ \omega \\ \tau \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_6 \end{pmatrix}$$

"т" – знак транспонирования.

Это система вида (5.34) Вместо системы при аргументе "t" можно использовать (это удобно) системы при аргументах ϑ (5.36) или "u" (5.39)

При этом для определения изменений оскулирующих элементов получим квадратуры. Решение уравнений можно существенно упростить, если принять во внимание, что угол η, определяющий положение возмущающегося тела меняется мало в течение одного оборота ИСЗ. Так, например [13], для круговой орбиты с радиусом $r \leq$ 8000 км за один оборот спутника угол η измениться для Луны ($j=1$) на $\Delta\eta_1 \approx 1^\circ$, а для Солнца ($j=2$) на $\Delta\eta_2 \approx 0{,}1^\circ$. Для орбиты ИСЗ с радиусом $r = 40000$ км (высокая орбита) $\Delta\eta_1 \approx 12^\circ$, а $\Delta\eta_2 \approx 1^\circ$. В силу этого можно положить для оценки возмущений за виток траектории ИСЗ $\eta = \eta_{cp} = \text{const}$. Полученная таким образом величина изменения оскулирующего элемента за виток будет функцией угла η. Общий вид приращений за виток оскулирующих элементов орбиты из-за влияния Луны, Солнца и других небесных тел следующий:

$$\begin{pmatrix} \delta p \\ \delta\Omega \\ \delta i \\ \delta e \\ \delta\omega \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} q_1(e,\eta,w,i) \\ q_2(e,\eta,w,i) \\ q_3(e,\eta,w,i) \\ q_4(e,\eta,w,i) \\ q_5(e,\eta,w,i) \end{pmatrix} \qquad (5.92)$$

где $\xi = \dfrac{M_j}{M_0}\left(\dfrac{a}{r_j}\right)^3$. Причем a – большая полуось орбиты спутника, r_j – радиус–вектор возмущающего тела относительно центра Земли, M_j – масса возмущающего тела, M_0 – масса Земли. Чаще всего полагают, что r_j не изменяется со временем. Тогда, для Луны $\xi = \xi_1 = \xi_{\text{Л}} \approx 0{,}56 \cdot 10^{-7}\left(\dfrac{a}{\bar{a}}\right)^3$, для Солнца $\xi = \xi_2 = \xi_{\text{C}} \approx 0{,}26 \cdot 10^{-7}\left(\dfrac{a}{\bar{a}}\right)^3$, где $\bar{a}$ – экваториальный радиус Земли.

Входящий в правые части системы (5.92) угол η характеризует положение возмущающегося тела (рис.5.8). На витке траектории спутника он считается неизменным. Однако, при исследовании орбиты спутника на больших временных интервалах появляется целесообразность оценки возмущений его орбиты за время полного оборота возмущающего тела относительно центрального (Земли). T_j. Для определения изменения некоторого элемента E_j за “*m*” целых оборотов можно воспользоваться формулой

$$E_j - E_{j0} = \sum_{k=1}^{m} \delta E_{jk}(\eta_{k\text{cp}}) \qquad (5.93)$$

где δE_{jk} – изменение орбиты за k-ый оборот спутника, $\eta_{k\text{cp}}$ – некоторое среднее значение угла η за время k – ого оборота.

Формулу (5.93) при $\frac{r}{r_j} < 1$ можно заменить следующей :

$$E_j - E_{j0} = \int_{t_0}^{t} \delta E_j \frac{dt}{T_{\text{сп}}} \qquad (5.94)$$

где δE_j – изменение j-того элемента орбиты за один оборот спутника, $T_{\text{сп}}$ – период обращения спутника.

Принимая во внимание, что возмущающие тело движется по орбите, близкой к круговой, с почти постоянной скоростью, можно записать

$$E_j - E_{j0} = \frac{T_j}{T_{\text{сп}}} \frac{1}{2\pi} \int_{\eta_0}^{\eta_0 + \omega_{\text{в}}(t - t_0)} \delta E_o \Delta\eta \qquad (5.95)$$

где $\omega_{\text{в}}$ – угловая скорость возмущающего тела.

В формуле (5.95) знак T_j должен совпадать со знаком $\omega_в$. За время T_j одного оборота возмущающего тела угол η изменяется от η_0 до $\eta_0 + 2\pi$. Имея это ввиду, приращения оскулирующих элементов орбиты спутника за $T_{\text{сп}}$, определяемые формулами (5.92), можно считать длиннопериодическими, а вековыми считать возмущения за один виток траектории возмущающего тела (за время T_j) [10].

Это вековое отклонение произвольного окулирующего элемента орбиты спутника определяется, таким образом, формулой:

$$\Delta E_j = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{T_j}{T_{\text{сп}}} \right| \int_{\eta_0}^{\eta_0 + 2\pi} \delta E_j d\eta \qquad (5.96)$$

где ${T_j}/{T_{\text{сп}}}$ является целым числом. Формулой (5.96) можно также пользоваться при ${T_j}/{T_{\text{сп}}}$ дробном, если пренебречь изменением оскулирующего элемента за один оборот спутника.

Осуществляя интегрирование в соответствии с (5.96) для приращений элементов орбиты, определяемых равенством (5.92) можно получить [13] следующие выражения для вековых уходов элементов за время T_j полного оборота возмущающегося тела:

$$
\begin{aligned}
&\Delta\Omega_{\text{в}} = -\frac{3}{2}\xi\frac{\pi}{\sqrt{1-e^2}}\frac{T_j}{T_{\text{сп}}}\left(1-e^2+5e^2\sin^2\omega\right)\cos i \\
&\Delta\omega_{\text{в}} = \frac{15}{2}\xi\frac{\pi}{\sqrt{1-e^2}}\frac{T_j}{T_{\text{сп}}}\left[\left(\cos^2 i-1+e^2\right)\sin^2\omega+\frac{2}{5}\left(1-e^2\right)\right] \\
&\Delta e_{\text{в}} = \frac{15}{4}\xi\pi e\frac{T_j}{T_{\text{сп}}}\sqrt{1-e^2}\sin^2 i\sin 2\omega \\
&\Delta i_{\text{в}} = -\frac{15}{8}\xi\frac{\pi e^2}{\sqrt{1-e^2}}\frac{T_j}{T_{\text{сп}}}\sin 2i\sin 2\omega \\
&\Delta a_{\text{в}} = 0
\end{aligned}
\tag{5.97}
$$

Так как $p = a\left(1-e^2\right)$, то $\Delta p_{\text{в}} = -2ae\Delta e_{\text{в}}$ (учитывая, что $\Delta a_{\text{в}} = 0$).

Численный анализ возмущений орбиты ИСЗ, подсчитанных по формулам (5.92) и (5.95) дает следующие результаты, приведенные в табличной форме 5.2 Анализ данных табл.5.2 показывает, что влияние Луны и Солнца на орбиту спутника, близкую к Земле очень невелико. Однако за один год высота перигея может изменяться на несколько километров, а положение узла на 5-7 угловых минут.

Таблица 5.2

Исходные данные:

$a = 7350$ км, $e = 0{,}1$; $\xi_1 = \xi_{\text{Л}} \approx 0{,}85\cdot10^{-7}$; $\xi_{\text{C}} = 0{,}40\cdot10^{-7}$; $\left(\frac{T_{\text{Л}}}{T_{\text{сп}}}\right) = 410$; $\left(\frac{T_{\text{C}}}{T_{\text{сп}}}\right) \approx 5000$.

Элемент	Изменения за один оборот спутника		Изменения за один оборот возмущенного тела	
	Влияние Луны	Влияние Солнца	Влияние Луны	Влияние Солнца
Долгота узла Ω	<0.17"	<0.08"	<34"	<3,2'
Угловое расстояние перигея от узла ω	<0.29"	<0.14"	<2'	<11,3'
Наклонение орбиты i	<0.17"	<0.08"	<0.43"	<2,4"
Эксцентриситет орбиты e	$< 2\cdot10^{-7}$ $< 1{,}5$ м	$< 0{,}93\cdot10^{-7}$ $< 0{,}6$ м	$< 1{,}41\cdot10^{-4}$ $< 0{,}3$ км	$< 2{,}31\cdot10^{-4}$ $< 1{,}7$ км
Перигейное расстояние орбиты спутника	Суммарное воздействие <2,1м		Суммарное воздействие за один год <5,1км	

5.7 Определение времени существования спутника

Время существования ИСЗ определяется продолжительностью полета спутника с момента его выведения на орбиту до входа в плотные слои атмосферы. На время существования спутника Земли оказывают влияние многие факторы, в том числе все рассмотренные выше. Так давление солнечных лучей и действие притяжения Луны и Солнца приводят к тому, что орбита КА совершает периодические колебания и при перемещении перигея в более плотные слои атмосферы увеличивается торможение. Например, вследствие воздействия Луны высота перигея ИСЗ «Эксплорер-6» (США) менялась каждые 3 месяца в пределах от 250 до 160 км. Вследствие этого время существования спутника оказалось два года (вместо рассчитанных 20 лет при отсутствии воздействия Луны)

Сплюснутось Земли приводит к перемещению перигея орбиты без изменения расстояния от центра Земли. Если, например, если перигей переместится из полярной области в экваториальную, то он будет расположен ближе к поверхности Земли и, значит, окажется в более плотных слоях атмосферы Плотность атмосферы меняется в течение суток: на высоте 300 км в полдень плотность почти вдвое больше чем в полночь. Плотность верхней атмосферы заметно увеличивается с усилением солнечной активности. Условиями, при которых спутник прекращает свое существование, соответствуют элементы некоторой критической орбиты – минимальная высота $h_{\text{кр}}$ полета, минимальный период обращения $T_{\text{кр}}$ и т.д. Под критической понимается такая орбита, на которой спутник может сделать один полный оборот. Критические значения высоты полета и периода обращения зависят от баллистического коэффициента $b = \frac{C_x S_{\text{м}}}{m}$ и параметров атмосферы. Установлено, что при изменении «*b*» в диапазоне $\left[0{,}002 \le b \le 2{,}0 \frac{\text{м}^3}{\text{кгс} \cdot \text{сек}^2}\right]$ величины $h_{\text{кр}}$ и $T_{\text{кр}}$ меняются сравнительно мало: $108 \le h_{\text{кр}} \le 188\,\text{км},\ 86{,}5 \le T_{\text{кр}} \le 88{,}1\,\text{мин}$. Обычно критическую высоту характеризуют минимально возможной высотой полета $h_{\text{кр}} = 110 - 120\,\text{км}$ и минимально возможным периодом обращения $T_{\text{кр}} = 86{,}5 - 86{,}7\,\text{мин}$ [6].

Эти значения справедливы для различных моделей атмосферы. Вследствие торможения в атмосфере эксцентриситет орбиты "e" постепенно уменьшается и становиться практически равным нулю в последние сутки, предшествующие прекращению существования. В результате обработки многочисленных данных установлено, что для спутников, орбиты которых имеют перигей на высоте 200-300 км и e>0,02 уменьшение эксцентриситета до значений e=0,001–0,002 практически совпадает (с точностью до одних – двух суток) с моментом прекращения существования КА.

Время существования определяется в результате решения дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов орбиты (системы (5,34), (5,36), (5,39)). На ранних стадиях проектирования находят применение приближенные аналитические зависимости [6], а так же зависимости, построения на основании многочисленных исследований и расчетов, представленных в виде диаграмм. Приведем некоторые из этих зависимостей. В случае круговых орбит можно пользоваться соотношениями, приведенными в табл.5.3 [6] Эти зависимости отвечают модели CIRA1961, которая соответствует периоду максимальной плотности атмосферы. Точность расчета времени существования по соотношениям табл.5.3 не хуже 15% получаемых фактических данных.

Таблица 5.3

№	Диапазон высот полета h [км]	Время существования $t_{сущ}$[суток]
1	200-250	$(-0{,}092-0{,}0005h)\,\frac{m}{S_м}$
2	250-300	$(-0.34-0.0015h)\,\frac{m}{S_м}$
3	300-350	$(-1.4-0.005h)\,\frac{m}{S_м}$
4	350-400	$(-3.1-0.01h)\,\frac{m}{S_м}$

В работе [13] приводиться следующие зависимости для определения времени снижения КА с высоты h_1 на высоту $h_2 < h_1$ из-за сопротивления атмосферы в случае около круговой орбиты:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{F(h_1) - F(h_2)}{b_1} \tag{5.98}$$

где $b_1 = \frac{b}{2} = \frac{1}{2}\frac{C_x S_м}{m}$ – конструктивный баллистический коэффициент, $F(h) = \frac{1}{2\sqrt{\mu}}\int_0^h \frac{\partial h}{p(h)\sqrt{r}}$, $r = R + h -$ радиус круговой орбиты. Время существования спутника на круговой орбите высотой h_0 определяется формулой:

$$t_{сущ} = \frac{F(h_0)}{b_1} \qquad (5.99)$$

Значение функции *F(h)* для изотермической модели атмосферы приводится в работе [13]. Таблица построена для диапазона высот 100-800 км. Ниже приводиться фрагмент этой таблицы для высот 200-540 км, наиболее распространяемых для ИСЗ (см.табл. 5.4)

Таблица 5.4

Высота *h*,км	*F(h)*, $\frac{м^3 сут}{кгс \cdot сек^2}$	Высота *h*,км	*F(h)*, $\frac{м^3 сут}{кгс \cdot сек^2}$	Высота *h*,км	*F(h)*, $\frac{м^3 сут}{кгс \cdot сек^2}$
200	0,0912	320	2,22	440	23,5
220	0,172,	340	3,44	460	32,9
240	0,306,	360	5,23	480	45,3
260	0,523	380	7,81	500	61,7
280	0,868	400	11,5	520	83,0
300	1,40	420	16,8	540	111

Для получения оценок времени существования в случае эллиптической орбиты можно использовать следующие зависимости [6, 7]:

$$t_{сущ} = \frac{3}{8}\frac{h_А - h_П}{a}\frac{T}{\left(-\frac{dT}{dt}\right)} сут \qquad (5.100)$$

где $h_а, h_п -$ высота в км апогея и перигея орбиты. $a -$ большая полуось орбиты [км], $T -$ период обращения [сек], $\frac{dT}{dt} -$ скорость изменения периода обращения $\left[\frac{сек}{сут}\right]$.

Приведем данные расчета по формуле (5.100) [6, 7]. Предположим, что ИСЗ 9.11.57г. находился на орбите с параметрами $h_п = 210 км, h_а = 810 км$, для которой период обращения $T = 5610$ сек и большая полуось $a = 6880$ км. Скорость изменения периода обращения $\left(-\frac{dT}{dt}\right)$ составляла $2{,}94\frac{сек}{сут}$. Вычисление по формуле (5.100) дает $t_{сущ} = 60$ суток. С использованием вычисленного $t_{сущ}$ датой прекращения полета спутника должна быть 8.01.58г., а в действительности спутник упал на Землю 4.01.58. Таким образом, получаем весьма близкий результат. В работе [12] приводятся примеры расчетов $t_{сущ}$ по аналитическим зависимостям, полученным с помощью разложения подынтегральных функций в формулах (5.81) в ряды по степеням эксцентриситета «*e*». Эти зависимости имеют достаточно громоздкий вид. Гораздо проще использовать графическую методику. В работе [13] даны результаты расчета на ЭВМ времени существования ИСЗ на эллиптической орбите в функции высот перигея и апогея, наклонения плоскости орбиты и начального положения перигея. Диапазон изменения переменных :

высот перигея, км	150-190 с шагом 10км .
высот апогея, км	200-400 с шагом 10км
наклонений орбиты	45-90
начального положения перигея 0-90	

Результаты получены интегрированием системы уравнений для оскулирующих элементов орбиты с учетом возмущающего влияния силы сопротивления атмосферы. Примерный вид графиков приводиться на рис.5.9.

В заключении отметим, что ошибки расчета времени существования в связи с вариациями плотностей атмосферы могут составлять десятки процентов, а на больших высотах более (500км) и в годы максимума солнечной активности могут в несколько раз превышать прогнозируемое время существования спутника.