ГЛАВА 6. ТРАССА СПУТНИКА

В настоящем разделе вводится понятие трассы спутника, анализируется характер трасс в зависимости от элементов орбиты, приводится алгоритм расчета трассы.

6.1 Понятие трассы ИСЗ. Характер трассы

Предположим, что Земля имеет шаровую форму. Назовем проекцией спутника на земную поверхность точку, в которой прямая, соединяющая спутник с центром Земли, пересекает её поверхность. Проекция положения спутника Земли на ее поверхность называется подспутниковой точкой. Совокупность подспутниковых точек называется трассой спутника. Если считать траекторию спутника невозмущенной, то его орбита (см.разд.2) принадлежит невращающейся плоскости, проходящей через центр Земли. В этих условиях, если бы Земля не вращалась вокруг своей оси, то трассой спутника был бы большой круг, по которому плоскость орбиты спутника пересекла бы поверхность Земли. Вращение Земли приводит к существенной деформации трассы. Чтобы выявить закономерности трассы спутника, рассмотрим ту меридиональную плоскость, которая перпендикулярна плоскости орбиты ИСЗ (рис.6.1). Спутник, двигаясь по орбите, проходит восходящий узел, при этом его широта так же как и широта подспутниковой точки, (геоцентрическая геодезическая или географическая) будет равна нулю. В дальнейшем будем пользоваться понятием геоцентрической широты φ'(см.разд.1).

Затем широта φ' спутника и подспутниковой точки увеличивается, достигая максимального значения в точке максимального возвышения спутника над плоскостью экватора. В этой точке аргумент широты «u» равен 90°, а геоцентрическая широта спутника равна наклонению орбиты i. Если пользоваться понятием геоцентрической широты φ', то в любой момент времени $\varphi'_{\text{сп}} = \varphi'_{\text{тр}}$, где $\varphi'_{\text{сп}}$ – геоцентрическая широта спутника, а $\varphi'_{\text{тр}}$ – геоцентрическая широта подспутниковой точки (трассы). После того, как спутник достиг максимального возвышения над плоскостью экватора его геоцентрическая широта начнет уменьшаться. Таким образом, максимальная широта спутника и подспутниковой точки оказывается равной i. Когда спутник, пройдя нисходящий узел орбиты, окажется в южном полушарии аналогично можно заключить, что максимальная южная широта спутника и его подспутниковой точки есть опять i. Таким образом, на вращающейся Земле трасса спутника оказывается некоторой кривой на поверхности Земли, лежащей в широтном поясе $[-i, +i]$, если $i < \frac{\pi}{2}$. Если $i > \frac{\pi}{2}$, то подспутниковые точки принадлежат широтному поясу $[i - \pi, \pi - i]$. В результате существуют зоны на поверхности Земли, которые не могут быть подспутниковыми. Эти зоны заштрихованы на рис.6.1.

Форма трассы определяется зависимостью $\varphi'_{\text{тр}}(\lambda'_{\text{тр}})$ ($\lambda'_{\text{тр}}$ – долгота подспутниковой точки) на развертке поверхности Земли. Эта форма определяется главным образом наклонением орбиты и периодом обращения спутника. Благодаря тому, что трасса вычерчивается спутниками на вращающейся Земле, угол пересечения трассой экватора всегда отличается от наклонения орбиты. (В частности, для полярных орбит он не равен 90°, так как при пересечении экватора подспутниковая точка отклоняется к западу).

Для прямых спутников с низкими околокруговыми орбитами и периодом обращения существенно меньшим 24 ч. (возможное значение периода $T \cong 90\text{мин}$) трасса напоминает синусоиду, многократно опоясывающею земной шар. На рис.6.2 показан характер трассы таких спутников на двух витках орбиты. Если за начальный момент времени взять время прохождения восходящего узла орбиты t_Ω, то координаты подспутниковой точки равны: $\varphi'_{\text{тр}}(t_\Omega) = 0; \lambda'_{\text{тр}}(t_\Omega) = \lambda'_\Omega$, где λ'_Ω – долгота подспутниковой точки в момент прохождения восходящего узла. Если пренебречь возмущением долготы восходящего узла из-за не сферичности Земли и влияния Луны и Солнца, то через виток траектории (в момент времени $t_\Omega + T$) координаты подспутниковой точки будут: $\varphi'_{\text{тр}}(t_\Omega + T) = 0; \lambda'_{\text{тр}}(t_\Omega + T) = \lambda'_\Omega - \omega_з T$, где, как обычно $\omega_з$ – угловая скорость суточного вращения Земли. Трассы двух соседних витков орбиты сдвинуты (к западу) на угол $\omega_з T$ (рис.6.2) На подобных трассах движение всюду направлено к северо-востоку или юго-востоку, а в крайних северных и южных точках – на восток. Иная картина трассы будет иметь место в случае сильно вытянутых орбит (с большим радиусом апогея) и орбит с большими периодами обращения. В этих случаях Земля в своем вращении на некоторых широтах (особенно вблизи экватора) будет обгонять спутник и на трассе могут появиться «петли», так что движение по крайней мере по части трассы будет для прямого спутника $\left(i < \dfrac{\pi}{2}\right)$ происходит в западном направлении. На рис.6.3 представлена качественная картина трассы на одном витке траектории спутника с большим эксцентриситетом орбиты, апогей которой находится в северном полушарии и совпадает с точкой максимального возвышения над плоскостью экватора (U=90°). Аргумент перицентра этой орбиты равен 270°. А на рис.6.4 показаны трассы с круговыми орбитами при i=65° и с очень большими периодами обращения : случай а) T=20час, б) T=30час [9].

Представляют интерес спутники с периодом обращения, кратным времени оборота Земли вокруг оси (т.е звездными суткам – 23ч 56м 4сек). Их иногда называют синхронными. Трасса такого спутника представляет собой замкнутую линию. Синхронный спутник периодически появляется над любой точкой трассы. Частным случаем синхронного спутника является суточный спутник – с периодом обращения, равным звездным суткам. В случае, если его орбита круговая, ее высота над Землей должна составлять ≈35786км (радиус орбиты 42164км). Трассы суточных спутников с круговыми орбитами и наклонением i, отличным от нуля, имеют форму восьмерки, перекрестие которой расположено в некоторой точке экватора. Эти трассы – «восьмерки» не опоясывают земной шар, а лежат в одной его стороне [9]. Максимальная широта подспутниковой точки (высота «восьмерки») равна наклонению плоскости орбиты. Наконец, частными и чрезвычайно важными в практическом отношении случаем суточного спутника является стационарный спутник, круговая орбита (с прямым обращением) которого лежит в плоскости экватора. Трасса такого спутника вырождается в точку на экваторе, так как угловые скорости радиуса-вектора такого спутника и Земли совпадают. Описывая трассы спутников, мы считали их движение невозмущенным. Наиболее существенно на трассах низких спутников сказываются возмущения от несферичности Земли. Стационарный спутник должен совершать долготные колебания благодаря тому, что Земля, помимо того, что сплюснута у полюсов, имеет так же “поперечное сжатие” (экваториальное сечение Земли представляет собой не круг, а эллипс). Он должен так же испытывать сравнительно сильное возмущающее влияние притяжений Солнца и Луны. Поэтому стационарные спутники снабжаются корректирующими двигательными установками, которые должны их удерживать над определенным пунктом земной поверхности. С этой целью на американских стационарных спутниках «АТС» используется экспериментальные электрические двигатели [9].

6.2. Построение трассы

Построение трассы сводиться к определению геоцентрических координат (широты φ' и долготы λ') подспутниковых точек в гринвичской системе координат $Ox_г y_г z_г$. Трасса начинается в определенный момент времени, но для построения и анализа трассы удобно в качестве начального момента времени взять время прохождения восходящего узла орбиты t_Ω. На рис.6.5 представлена схема построения трассы. Рассматривается случай околокруговой орбиты, характеризуемой высотой *h* и наклонением *i*.

На рис.6.5 точка M_1 – подспутниковая точка, соответствующая моменту времени *t* движения спутника на орбите с учетом вращения Земли и смещения долготы восходящего узла $\delta\Omega$ из-за сжатия Земли. Точка M_0 соответствует движению спутника без учета указанных факторов. Из сферического треугольника AM_0B следует (рис.6.5)

$$\sin\varphi'_0 = \sin u \sin i, \qquad \sin \breve{A}B = \frac{\mathrm{tg}\varphi'_0}{\mathrm{tg} i} \tag{6.1}$$

Так как вращение Земли и смещение узла орбиты на широту точки M_0 не влияют, то $\varphi'_{\text{тр}} = \varphi'_0$.

Долгота подспутниковой точки в гринвичской СК для произвольного момента времени t равна:

$$\lambda'_{\text{тр}} = \lambda'_{\Omega} + \breve{A}B - \omega_{\Sigma}(t - t_{\Omega}), \tag{6.2}$$

где ω_{Σ} – суммарная угловая скорость (скорость вращения Земли и прецессии узла орбиты), λ'_{Ω} – долгота подспутниковой точки в момент прохождения восходящего узла(т. A).

Смещение долготы восходящего узла $\delta\Omega$ определяется формулой (5.54):

$$\delta\Omega = \frac{-\varepsilon\cos i}{\mu p^2} u,$$

$$\delta\dot{\Omega} = \frac{-\varepsilon\cos i}{\mu p^2}\dot{u} \qquad \dot{u} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2 j} \quad (j \approx 1)$$

где u – аргумент широты в момент времени t. В случае околокруговой орбиты $p = r = R + h$ (R – радиус Земли);

$$u = \nu t = \sqrt{\frac{\mu}{(R+h)^3}} t \qquad \left(\nu = \frac{V_{\text{кр}}}{R+h}\right); \ \dot{u} = \nu = \sqrt{\frac{\mu}{(R+h)^3}}$$

Тогда

$$\omega_{\Sigma} = \omega_{З} - \frac{\varepsilon\cos i}{\sqrt{\mu}(R+h)^{7/2}} \tag{6.3}$$

$$\omega_{З} = \frac{2\pi}{T_{\text{зв}}} \ (T_{\text{зв}} - \text{звездныесутки}).$$

Разность времени можно выразить через аргумент широты

$$t - t_{\Omega} = \frac{u}{2\pi} T \ , \tag{6.4}$$

где T – период обращения спутника по круговой орбите радиуса $r=R+h$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mu}} = 2\pi\frac{(R+h)^{3/2}}{\sqrt{\mu}}.$$

Таким образом, при расчете трассы на интервале $0 \le u \le 2\pi$ с учетом (6.1), (6.2), (6.4) следует использовать следующие соотношения:

$$1)\ \varphi'_{\text{тр}} = \arcsin(\sin i \sin u)$$

$$2)\ \lambda'_{\text{тр}} = \lambda'_{\Omega} + \breve{A}B - \left(\frac{T}{T_{\text{зв}}} - \frac{\varepsilon\cos i}{\mu(R+h)^2}\right)u \tag{6.5}$$

$$3)\ \breve{A}B = \begin{cases} \arcsin\dfrac{\text{tg}\varphi'}{\text{tg}i} & \text{при} \quad 0 \le u \le \pi/2 \\ \pi - \arcsin\dfrac{\text{tg}\varphi'}{\text{tg}i} & \text{при} \quad \pi/2 \le u \le \dfrac{3}{2}\pi \\ 2\pi - \arcsin\dfrac{\text{tg}\varphi'}{\text{tg}i} & \text{при} \quad \dfrac{3}{2}\pi \le u \le 2\pi \end{cases}$$

Из 1-ой формулы (6.5) следует, что $\varphi' = \varphi'_{\max} = \arcsin(\sin i) = i$ при $u = \pi/2$ и $\varphi' = \varphi'_{\min} = -\arcsin(\sin i)$ при $u = {}^3\!/_2\,\pi$. Из 2-ой формулы (6.5) следует, что при изменении аргумента широты на 360° начало трассы каждого последующего витка смещено относительно предыдущего на величину

$$\Delta\lambda'_{в} = -2\pi\left(\frac{T}{T_{\text{зв}}} - \frac{\varepsilon\cos i}{\mu(R+h)^2}\right), \tag{6.6}$$

откуда также следует, что любая точка трассы на последующем витке смещена по долготе в западном направлении на одну и ту же величину $\Delta\lambda'_{в}$. Это смещение называется межвитковым сдвигом. Например, для высоты круговой орбиты 284км (период T=1,5ч) величина межвиткового сдвига составляет 22,5° [10]. После полного поворота Земли (звездные сутки) витки трассы последующих суток будут каким-то образом располагаться относительно витков предыдущих суток.

Если в звездных сутках укладывается целое число периодов обращения спутника, то трасса начиная с некоторого витка повторяется. (Последнее справедливо при отсутствии возмущений, т.е при $\omega_{\Sigma} = \omega_{з}$). Если в звездных сутках не содержится целое число периодов, то наблюдается сдвиг по долготе, который называется суточным сдвигом.

Проведенный анализ по межвитковому и суточному сдвигу справедлив и для эллиптических орбит, так как единственным параметром, определяющим рассмотренные эффекты, является период обращения спутника. Необходимо заметить, что на небольших интервалах времени (1-2 витка орбиты ИСЗ) долгота точки весеннего равноденствия $\lambda'_{*} \approx 0$ и следовательно $\lambda'_{\Omega} \approx \Omega$.

Формулы (6.5) справедливы при расчете трассы околокруговых орбит. Для расчета трассы эллиптических орбит следует использовать формулы (6.1), (6.2). Все приведенные выше зависимости учитывают влияние на характер трассы только одного возмущающего ускорения: от сжатия земного эллипсоида. В общем случае, при учете действия и других возмущающих факторов, можно рекомендовать следующий алгоритм расчета трассы.

1. Рассматривается система уравнений для оскулирующих элементов орбиты (5.34), (5.36), (5.39). Эта система решается численным интегрированием и находятся оскулирующие элементы орбиты спутника $p, i, \Omega, \omega, e, \tau$.

2. По формулам (3.6) находятся декартовы координаты *x, y, z* спутника в инерциальной геоцентрической экваториальной системе координат *Oxyz* (см.разд.3.3)

3. Используя таблицу направляющих косинусов т.3.4 и рис.3.5, находим декартовы координаты $x_{г}, y_{г}, z_{г}$ спутника в гринвичской (географической) СК связанной с вращением Земли. А именно:

$$x_{г} = x\cos\lambda'_{*} + y\sin\lambda'_{*};\ \ y_{г} = -x\sin\lambda'_{*} + y\cos\lambda'_{*};\ \ z_{г} = z. \tag{6.7}$$

(λ'_{*} – долгота точки весеннего равноденствия).

Напомним (см.разд.3.2), что $\lambda'_{*} = 360^{\circ} - S_{г}$, где $S_{г}$ – гринвичское звездное время, которое находится по астрономическим ежегодникам.

4. Используя геометрические связи, определяем гринвичские угловые координаты подспутниковой точки $\varphi'_{тр}$ и $\lambda'_{тр}$. Широта подспутниковой точки: $\varphi'_{тр} = \varphi'_{сп} = \varphi'$, где $\varphi'_{сп}$ – геоцентрическая широта спутника. Имеем (рис.6.5):

$\sin\varphi' = \frac{z_г}{r}$, где r – радиус-вектор спутника относительно центра Земли, а $z_г = z$. Таким образом,

$$\varphi'_{тр} = \arcsin\frac{z}{r} \qquad (6.8)$$

Далее можем записать:

$y_г = r\cos\varphi'\sin\lambda'_{тр}$, откуда $\sin\lambda'_{тр} = \frac{y_г}{r\cos\varphi'}$ или

$$\lambda'_{тр} = \arcsin\left(\frac{y_г}{r\cos\varphi'}\right) \qquad (6.9)$$

Если рассматривать Землю как сжатый сфероид (эллипсоид вращения), то значение радиуса–вектора r' подспутниковой точки определяется формулой [4]:

$$r' = a_з\sqrt{\frac{1-e_з^2}{1-e_з^2\cos^2\varphi'}} \qquad (6.10)$$

где (см.разд.1) $a_з = 6378{,}245 км; e_з^2 = 2\alpha_з - \alpha_з^2; \alpha_з = \frac{1}{298{,}3}$. Формулы (6.8) и (6.9) решают поставленную задачу.

Заметим, что на практике, как правило, оказывается достаточным метод расчета трассы по формулам (6.1) и (6.2), а описанный выше общий метод может служить для оценки погрешности расчета.