ГЛАВА 7. МАНЕВРИРОВАНИЕ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Управляемое движение КА, в результате которого происходит изменение орбиты или траектории его полета называется маневром. В зависимости от функционального назначения выполняемого КА маневра принято различать:

- маневры орбитального перехода;
- корректирующие маневры;
- маневры входа в атмосферу планеты;
- маневры снижения и посадки.

Под маневром орбитального перехода понимают такое управляемое движение, которое обеспечивает переход КА с одной орбиты на другую.

Корректирующие маневры также изменяют орбиту КА, однако это изменение предназначено для коррекции ошибок действительной траектории полета с целью перехода на траекторию, близкую к расчетной. Особенностью корректирующих маневров является их вероятностный характер, поскольку отклонения действительной траектории от расчетной могут быть предсказаны лишь статистически.

Маневры входа в атмосферу предназначены для осуществления спуска КА на поверхность планеты или погружения КА в плотные слои атмосферы с последующим переходом на новую орбиту.

Маневры снижения и посадки обеспечивают вывод КА в заданный район и уменьшение скорости КА в момент соприкосновения с поверхностью планеты до безопасной величины для сохранения конструкции и жизни экипажа. Способы выполнения этих маневров в значительной мере зависят о того, имеется ли атмосфера у небесного тела, на которое осуществляется посадка. Решение задачи космического полета в некоторых случаях предусматривает выполнение КА всех перечисленных маневров, а иногда достаточно некоторых из них. Так, при полете с Земли на Венеру или Марс с посадкой обязательны все маневры. При сближении и встрече одного КА с другим, движущимся по известной орбите, бывает достаточно первых двух маневров.

7.1. Виды и общая характеристика маневров орбитального перехода

В зависимости от взаимного расположения и геометрических характеристик начальной и конечной орбит различают следующие типы маневров орбитального перехода:

− компланарные и некопланарные переходы. Переход является компланарным, если он осуществляется между орбитами, находящимися в одной плоскости, а переходная орбита лежит в этой плоскости.

− маневры между круговыми (квазикруговыми), эллиптическими, гиперболическими орбитами и их комбинации.

В зависимости от физической природы ускорений, используемых для изменения направления движения КА, маневры разделяются на активные, пассивные и смешанные.

Активные маневры реализуются за счет тяги двигательной установки (ДУ). Этот вид маневра является основным видом маневра орбитального перехода. Пассивные маневры осуществляются за счет гравитационных, аэродинамических и других сил. Область применения пассивных маневров весьма ограничена. Более эффективными являются смешанные маневры: ракетодинамический маневр и маневр с использованием гравитационных сил. Активные маневры в зависимости от величины управляющего ускорения и продолжительности работы ДУ делят на:

– маневры под действием импульсной тяги;

– маневры под действием непрерывной тяги.

Выделение таких маневров связывают с энергетическими возможностями и принципом действия используемых ДУ. Последние подразделяют: ДУ большой (на химическом и ядерном топливах) и малой (электроракетные двигатели) тяг.

При импульсной аппроксимации активных участков действие ДУ сводится к скачкообразному изменению скорости полета без изменения координат КА за время работы ДУ. Так как при этом гравитационные потери не учитываются, удовлетворительная оценка необходимых энергетических затрат на маневрирование может быть выражено через требуемый запас характеристической скорости. Полученная величина скорости пересчитывается в массу топлива, необходимую для реализации маневра с использованием формулы Циолковского:

$$m_{\text{т}} = m_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{V}{I_y g} \right) \right], \tag{7.1}$$

где m_0 – начальная масса КА, $I_{\text{у}}$ – удельный импульс тяги, V – импульсная скорость реализации маневра (характеристическая скорость).

Особенностью маневров с использованием ДУ малой тяги является малость создаваемых ими ускорений по сравнению с гравитационными. Это исключает возможность импульсной аппроксимации активных участков.

Составив краткое представление о маневрах КА, рассмотрим в общих чертах определение их характеристик. Движение КА происходит под действием силы гравитационного притяжения и управляющей силы ДУ. Эффективное использование ДУ предполагает знание изменений элементов орбиты под действием приложенной к КА тяги. При этом ориентация тяги в пространстве и ее изменение во времени должны определятся с учетом конкретных требований, предъявляемых к выполняемому маневру. Примерами таких требований является, например, обеспечение минимума затрат топлива или максимума полезной нагрузки при осуществлении заданного маневра за фиксированное время. Решение данной задачи связано с интегрированием дифференциальных уравнений движения КА. Если КА рассматривать как точку с постоянной массой m, обращающуюся вокруг центрального притягивающего тела эти уравнения могут быть представлены в виде одного векторного уравнения (5.2):

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}\bar{r} + \bar{q}.$$

Здесь $\bar{q} = \frac{\bar{P}}{m} = q_x\bar{i} + q_y\bar{j} + q_z\bar{k}$ – вектор управляющего ускорения, $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$. В проекциях на оси инерциальной СК $Oxyz$ эти уравнения имеют вид (5.23)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3} + q_x$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3} + q_y$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\mu z}{r^3} + q_z$$

Начальные условия: $t = t_0$; $\bar{r}_0 = \bar{r}(t_0)$; $\bar{V}_0 = \bar{V}(t_0)$.

Сущность орбитального маневра заключается в таком изменении вектора управляющего ускорения $\bar{q}$, при котором переход КА из начального $\bar{r}(t_0)$, $\bar{V}(t_0)$ в желаемое конечное состояние $\bar{r}(t_k)$ и $\bar{V}(t_k)$ осуществляется за заданное время $t_k - t_0$, где t_k – время окончания маневра. Это краевая задача. На практике широкое распространение получили итерационные линейные методы решения краевых задач.

Эти методы позволяют установить приближенную линейную зависимость (для нелинейных связей) между вариациями вектора промаха и вектора управлений, в результате чего решение краевой задачи сводится к последовательному устранению невязок в краевых условиях целенаправленным изменением компонент вектора искомых управлений. Главная проблема линейных методов это поиск достаточно надежного нулевого приближения искомых управлений, обеспечивающего устойчивую сходимость итерационного процесса. Нулевое приближение, как правило, определяется в рамках теории эллиптического движения с использованием различных искусственных приемов. Важное значение имеют результаты качественного исследования. Эти положения лежат в основе методической направленности рассматриваемых в разд.7 методов.

7.2. Одноимпульсные маневры изменения параметров орбиты

Основной особенностью данных маневров является малая продолжительность активных участков по сравнению с общей продолжительностью полета. В этом случае активные участки полета аппроксимируются точками положения мгновенных импульсов скорости, т.е.

действие тяги двигателя сводится к скачкообразному изменению скорости полета без изменения координат КА за время работы двигателя. Допустимо употребление терминов корректирующий импульс или импульс скорости. Будем полагать, что величина импульса скорости по абсолютной величине значительно меньше орбитальной скорости полета КА, а следовательно допустимо линейное представление между корректируемым параметром и величиной импульса.

С помощью уравнения (5.2) $\frac{d\overline{V}}{dt} = \overline{a} + \overline{q}$ можно получить следующее уравнение возмущенного относительно первоначальной орбиты движения, записанное в инерциальной СК

$$\frac{d\Delta\overline{V}}{dt} = \overline{q}\ , \qquad (7.2)$$

где $\Delta\overline{V}$ – импульс скорости. Учитывая малость времени $t_и$ действия импульса, в качестве инерциальной СК удобно принять орбитальную СК O_2STW или СК, оси которой ориентированы по осям естественного трехгранника орбиты невозмущенного движения до приложения импульса, так что поворотом этих осей за время $t_и$ можно пренебречь. Интегрируя векторное уравнение (7.2), найдем импульс скорости:

$$\Delta\overline{V} = \overline{J} = \int_0^{t_и} \overline{q}dt \qquad (7.3)$$

В проекциях на оси орбитальной СК получим:

$$\Delta V_S = J_S = \int_0^{t_u} q_S dt; \qquad \Delta V_T = J_T = \int_0^{t_b} q_T dt; \qquad \Delta V_W = J_W = \int_0^{t_b} q_W dt \qquad (7.4)$$

где $q_S = S;\ q_T = T;\ q_W = W$ – проекции управляющего ускорения на орбитальные оси.

Изменение элементов орбиты в возмущенном движении в зависимости от составляющих вектора управляющего ускорения $\overline{q}(S,T,W)$ определяется системой уравнений для оскулирующих элементов (системы (5.34), (5.36), (5.39)), но только в этих системах $\overline{q}$ выступало в качестве возмущающего ускорения. В данном случае $\overline{q}$ является управляющим ускорением. Для удобства дальнейших расчетов перепишем систему (5.34), несколько ее трансформировав.

$$\begin{aligned}
&1.\ \frac{dp}{dt}=2\sqrt{\frac{p}{\mu}}rT \\
&2.\ \frac{d\Omega}{dt}=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\frac{r}{p}\sin u\operatorname{cosec} i\cdot W \\
&3.\ \frac{di}{dt}=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\frac{r}{p}\cos u\cdot W \\
&4.\ \frac{d\omega}{dt}=\frac{1}{e}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[-S\cos\vartheta+T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin\vartheta-\frac{re}{p}W\sin u\operatorname{ctg} i\right] \\
&5.\ \frac{de}{dt}=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[S\sin\vartheta+\cos\vartheta\cdot T+\frac{r}{p}(\cos\vartheta+e)T\right] \\
&6.\ \frac{d\tau}{dt}=\frac{r^2}{e\mu}\left[(eN\sin\vartheta-\cos\vartheta)S+\frac{r}{p}NT\right],\ \text{где}\ u=\omega+\vartheta:
\end{aligned} \tag{7.5}$$

$$N=\frac{2r}{p}\int_0^{\vartheta}\frac{\cos\vartheta d\vartheta}{(1+e\cos\vartheta)^3};\quad t-\tau=p\sqrt{\frac{p}{\mu}}\int_0^{\vartheta}\frac{d\vartheta}{(1+e\cos\vartheta)^2};\quad r=\frac{p}{1+e\cos\vartheta}.$$

Учитывая соотношения $a=\frac{p}{1-e^2}$; $r_{\text{п}}=\frac{p}{1+e}$; $r_{\text{а}}=\frac{p}{1-e}$, легко получить уравнения:

$$\begin{aligned}
&1.\ \frac{da}{dt}=\frac{2p}{(1-e^2)^2}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[Se\sin\vartheta+(1+e\cos\vartheta)T\right] \\
&2.\ \frac{dr_{\text{п}}}{dt}=\frac{p}{(1+e)^2}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[-S\sin\vartheta+rT\frac{2(1-\cos\vartheta)+e\sin\vartheta}{p}\right] \\
&3.\ \frac{dr_{\text{а}}}{dt}=\frac{p}{(1-e)^2}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[S\sin\vartheta+rT\frac{2(1+\cos\vartheta)+e\sin\vartheta}{p}\right]
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Определение из уравнений (7.5), (7.6) явных зависимостей элементов орбиты от приложенного ускорения в общем случае представляет определенные трудности. Не меньшие трудности возникают при проведении параметрического анализа полученных решений с целью установления зависимости между требуемым изменением оскулирующих элементов орбиты и управляющим ускорением. Поэтому целесообразно вначале составить общее представление о влиянии ориентации управляющего ускорения на характер изменения элементов орбиты. Из 2-го и 3-го уравнений системы (7.5) следует, что изменение положения плоскости орбиты (i,Ω) происходит под действием составляющей ускорения W, нормальной к плоскости орбиты. Причем для обеспечения монотонности изменения Ω и i во времени необходимо периодически менять при $u = \pm\pi/2$ и $u = \pi$ направление тяги на противоположное. Изменение “a”, “p”, “e” зависит от составляющих управляющего ускорения, расположенных в плоскости орбиты. Наконец, 4-е и 6-е уравнения системы (7.5) свидетельствуют о зависимости положения орбиты в ее плоскости от действия всех составляющих вектора управляющего ускорения. В случае плоского движения КА $(W = 0)$ уравнения (7.6) позволяют сравнительно просто выбрать такое направление действия постоянной по величине тяги, при котором элементы орбиты либо остаются постоянными, либо изменяются с максимальной скоростью [2]. Итак, обратимся к системе (7.5).

Учитывая, что положение КА во время действия импульса тяги не меняется, после интегрирования каждого уравнения в пределах $[0 - t_{\text{и}}]$ и принимая во внимание соотношения (7.4) получим систему уравнений относительно конечных приращений оскулирующих элементов:

$$\begin{aligned}
&1.\ \Delta p = \sqrt{\frac{p}{\mu}} r \Delta V_T \\
&2.\ \Delta\Omega = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{r}{p} \sin u \operatorname{cosec} i \cdot \Delta V_W \\
&3.\ \Delta i = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{r}{p} \cos u \Delta V_W \\
&4.\ \Delta\omega = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-\Delta V_S \cos\vartheta + \Delta V_T \left(1 + \frac{r}{p}\right) \sin\vartheta - \frac{re}{p} \Delta V_W \sin u \operatorname{ctg} i \right] \\
&5.\ \Delta e = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[\Delta V_S \sin\vartheta + \Delta V_T \cos\vartheta + (\cos\vartheta + e) \frac{r}{p} \Delta V_T \right]
\end{aligned} \tag{7.7}$$

В системе уравнений (7.7) величины r, p, e, Ω, i являются элементами орбиты в момент приложения импульса с компонентами $\Delta V_S, \Delta V_T, \Delta V_W$. Аргумент широты “$u$” и истинная аномалия ϑ относятся к точке орбиты, в которой прикладывается импульс. Аналогично, используя систему (7.6) можно получить отклонения элементов $\Delta a, \Delta r_{\text{п}}, \Delta r_{\text{а}}$. Систему (7.7) удобно использовать для расчета одноимпульсных маневров, если исходная орбита является эллиптической или гиперболической. Если же начальная орбита является круговой или близкой к ней, то для расчета одноимпульсных маневров можно использовать результаты теории возмущенного кругового движения [13]. Пусть $\Delta r, \Delta n, \Delta b -$ возмущения координат КА соответственно вдоль радиуса, трансверсали и нормали к плоскости орбиты. Тогда в соответствии с [13] можно записать:

$$
\begin{aligned}
&\Delta r = \frac{\sin\varphi}{\upsilon}\Delta V_S + \frac{2(1-\cos\varphi)}{\upsilon}\Delta V_T \\
&\Delta n = -\frac{2(1-\cos\varphi)}{\upsilon}\Delta V_S - \frac{3\varphi - 4\sin\varphi}{\upsilon}\Delta V_T \\
&\Delta b = \frac{\sin\varphi}{\upsilon}\Delta V_W,
\end{aligned}
\qquad (7.8)
$$

где $\varphi = \upsilon t -$ угловая скорость полета КА, отсчитываемая от точки приложения импульса; $\upsilon = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\mu}{r}} -$ средняя угловая скорость движения КА по орбите с радиусом “r”.

При решении практических задач возникает необходимость минимизации управляющих импульсов при достижении заданного уровня изменения параметров орбиты.

Пусть, например, требуется минимизировать энергетические затраты для изменения положения плоскости орбиты в пространстве. Это положение определяется параметрами i и Ω. Обратимся к 3-му и 2-му уравнениям системы (7.7). Третье уравнение из (7.7) перепишем в виде:

$$\Delta i = \frac{r}{p}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\cos u \Delta V_W = \frac{r\cos u}{h}\Delta V_W, \text{ где } h = \sqrt{p\mu} = rV\cos\theta_V - \qquad (7.9)$$

константа интеграла площадей.

Из (7.9) следует, что минимизация энергетических затрат для изменения i достигается приложением импульса ΔV_W в точке $u = 0$ или $u = \pi$ $(\cos u = \pm 1)$. Из указанных двух точек следует выбрать ту, где величина “r” является наибольшей (скорость меньшей). Следовательно, при $-\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}$ импульс ΔV_W следует прикладывать в нисходящем узле $(u = \pi)$. При $\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{3\pi}{2} -$ в восходящем узле $(u=0)$. При $\omega=\pm\frac{\pi}{2}$ обе указанные точки эквивалентны. Заметим, что такое приложение ΔV_W не изменяем долготу восходящего узла Ω, которая определяется 2-ым уравнением из (7.7). Перепишем это уравнение в несколько другом виде:

$$\Delta\Omega=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\frac{r}{p}\sin u\,\mathrm{cosec}\,i\,\Delta V_W=\frac{\sin u\,\mathrm{cosec}\,i}{V\cos\theta_V}\Delta V_W \tag{7.10}$$

$$\left(V\cos\theta_V=\frac{h}{r},\ h=\sqrt{p\mu}\right).$$

Из (7.10) следует, что минимизация энергетических затрат для изменения Ω достигается приложением импульса ΔV_W в точках вертекса (при $u=\frac{\pi}{2}$ – точка верхнего, а при $u=-\frac{\pi}{2}$ – нижнего вертекса). В этих точках $\sin u=\pm1$. Если $-\pi<\omega<0$, то необходимо использовать верхний вертекс, а если $0<\omega<\pi$, то нижний вертекс. То есть там, где скорость V меньше. Наклонение плоскости орбиты i при этом, как видно из уравнения (7.9) не изменится.

В ряде случаев требуется производить оценку действия составляющих импульса управляющей силы по осям естественного трехгранника (касательная, нормаль, бинормаль). $J_\tau=\Delta V_\tau$; $J_N=\Delta V_N$; $J_W=\Delta V_W$. Если известен результат действия импульсов $J_S=\Delta V_S$, $J_T=\Delta V_T$, $J_W=\Delta V_W$ по осям орбитальной СК, то для получения требуемой оценки достаточно использовать зависимости (7.7), спроектировав импульсы $J_S=\Delta V_S$ и $J_T=\Delta V_T$ на касательную к (направление τ) и нормаль (направление *N*). ($J_W=\Delta V_W$ остается тем же). Имеем (рис.7.1)

$$\begin{aligned}J_T&=J_\tau\cos\theta_V-J_N\sin\theta_V\\ J_S&=-J_N\cos\theta_V-J_\tau\sin\theta_V\end{aligned}\quad, \tag{7.11}$$

где (см.рис.5.1 и формулы (2.27)-(2.29))

$$\begin{aligned}\cos\theta_V&=\frac{1+e\cos\vartheta}{\sqrt{1+e^2+2e\cos\vartheta}}=\frac{V_T}{V};\\ \sin\theta_V&=\frac{e\sin\vartheta}{\sqrt{1+e^2+2e\cos\vartheta}}=\frac{V_r}{V}.\end{aligned} \tag{7.12}$$

В результате можно легко получить формулы, определяющие изменение элементов эллиптической и гиперболической орбиты. Например, для эллиптической орбиты получаем [2]:

$$\Delta a = \frac{2a^2 V}{V_I^2 R} J_\tau; \quad \Delta e = \frac{2aV(e+\cos\vartheta)}{V_I^2 R(2a-r)} J_\tau - \frac{r\sin\vartheta}{aV} J_N;$$

$$\Delta\omega = \frac{2arV\sin\vartheta}{eV_I^2 R(2a-r)} J_\tau + \frac{1}{V}\left(2+\frac{r\cos\vartheta}{ae}\right) J_N - \frac{r\sin u}{\sqrt{p\mu}\,\mathrm{tg}i} J_W \qquad (7.13)$$

где $V_I = \sqrt{\dfrac{\mu}{r}} = \sqrt{\dfrac{g_0 R^2}{r}}$ – круговая скорость, R – радиус Земли.

Для $\Delta\Omega$ и Δi получим соотношения, приведенные выше (см. (7.7)).

7.3. Импульсные маневры орбитального перехода

Эти маневры выполняются для перехода с одной орбиты на другую. При этом могут изменяться сразу несколько элементов орбиты (иногда все). Если орбиты имеют одну общую точку, то возможен одноимпульсный переход, который осуществляется за счет маневра, выполняемого под действием импульсной тяги, прикладываемой в точке пересечения орбит. Импульс рассчитывается так, чтобы векторная сумма орбитальной скорости на исходной орбите $\overline{V}_1$ и импульса скорости $\Delta\overline{V}$ равнялась вектору скорости $\overline{V}_2$, соответствующему скорости КА в рассматриваемой точке на новой орбите:

$$\overline{V}_2 = \overline{V}_1 + \Delta\overline{V} \qquad (7.15)$$

Если в общем случае начальная и конечная орбита лежат в разных плоскостях, составляющих между собой угол $\Delta i = i_2 - i_1$, то величина импульса скорости определяется формулой

$$\Delta V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos\Delta i} \qquad (7.16)$$

Так, например, для случая одноимпульсного перехода между круговыми орбитами одного радиуса в точках их пересечения имеем:

$$\Delta V = 2V_{\text{кр}}\sin\frac{\Delta i}{2} \qquad (7.17)$$

где $V_1 = V_2 = V_{\text{кр}} = \sqrt{\dfrac{\mu}{r}}.$

Из (7.17) следует, что при $\Delta i = 60^\circ$, $\Delta V = V_{\text{кр}}$, а при $\Delta i = 90^\circ$, $\Delta V = \sqrt{2}V_{\text{кр}} = V_{\text{пар}} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$.

В общем случае орбитальный переход можно осуществить путем выполнения нескольких импульсных маневров. На практике чаще всего применяется двухимпульсный переход. Решение задач двухимпульсных переходов, как правило, связано со значительными математическими трудностями. Главная трудность обусловлена необходимостью обеспечения перехода с минимальным суммарным импульсом при наличии тех или иных ограничений.

Двухимпульсные переходы можно разделить на два больших класса: переходы с малыми импульсами (когда допускается линеаризация уравнений движения) и с большими импульсами. В первом классе переходы осуществляются между почти круговыми орбитами и поэтому используются уравнения возмущенного кругового движения (7.8). Во втором классе переходов ограничения на начальную и конечную орбиты не накладываются (т.е. они могут быть произвольными и не обязательно почти круговыми). В этом случае линеаризованные уравнения движения становятся неприемлемыми (при переходах могут потребоваться большие корректирующие импульсы) и для решения задач двухимпульсных переходов применяется общая теория кеплеровского движения без линеаризации уравнений движения.

а) Рассмотрим случай перехода между почти круговыми орбитами в рамках линеаризованной теории.

Будем полагать, что начальная и конечная орбиты заданы элементами $p_1, e_1, \omega_1, i_1, \Omega_1$ и $p_2, e_2, \omega_2, i_2, \Omega_2$, причем индекс "1" относится к начальной орбите. Допустим, что $e_1 << 1, e_2 << 1$ (орбиты близки к круговым). Поэтому правые части уравнений орбит в полярной системе координат

$$r_1 = \frac{p_1}{1 + e_1 \cos\vartheta_1}, \; r_2 = \frac{p_2}{1 + e_2 \cos\vartheta_2}$$

могут быть разложены в ряд по степеням эксцентриситета:

$$r_1 = p_1 - p_1 e_1 \cos\vartheta_1, \; r_2 = p_2 - p_1 e_2 \cos\vartheta_2 \tag{7.18}$$

Задача двухимпульсного перехода состоит в определении корректирующих импульсов

$$\Delta V_1(\Delta V_{S1}, \Delta V_{T1}, \Delta V_{W1}); \ \Delta V_2(\Delta V_{S2}, \Delta V_{T2}, \Delta V_{W2}),$$

а также точек их приложения (аргументов широты u_1, u_2), обеспечивающих переход с начальной орбиты на конечную при заданных дополнительных условиях или ограничениях. Часто требуется обеспечить “min” суммарного импульса ΔV_Σ. Выше (см.7.2) было показано, что маневр изменения положения плоскости орбиты $\Delta i = i_2 - i_1$ с помощью импульса ΔV_{W1} следует производить в точке начальной орбиты, где скорость минимальна ($r_1 = \max$).

В дальнейшем для упрощения изложения будем рассматривать компланарные переходы, т.е. орбиты заданы элементами $p_1, e_1, \omega_1, p_2, e_2, \omega_2$. Требуется определить аргументы широты u_1, u_2 точек приложения трансверсальных импульсов $\Delta V_{T1}, \Delta V_{T2}$, обеспечивающих переход КА с начальной орбиты наконечную. В работе [13] показано, что при $0 \le \frac{\Delta r}{r} \le 0{,}5$, где $\Delta r = | r_2 - r_1 |$, $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ линеаризованная теория по сравнению с точным решением задач импульсных переходов приводит к практически совпадающим результатам. Приведенное выше условие означает, что для применения линеаризованной теории средние радиусы орбит не должны отличаться более чем на 3000 км.

Используя формулы (7.18) определим для данного значения аргумента широты “u” (линия узлов общая) расстояние Δr между орбитами в радиальном направлении:

$$\Delta r = r_2 - r_1 = p_2 - p_2 e_2 \cos\vartheta_2 - p_1 + p_1 e_1 \cos\vartheta_1;$$

причем $\vartheta_1 = u - \omega_1; \vartheta_2 = u - \omega_2.$

Тогда получим
$$\Delta r = A_1 + A_2 \cos u + a_3 \sin u \tag{7.19}$$

где $A_1 = p_2 - p_1, A_2 = p_1 e_1 \cos\omega_1 - p_2 e_2 \cos\omega_2, A_3 = p_1 e_1 \sin\omega_1 - p_2 e_2 \sin\omega_2$.

Определим минимальное и максимальное расстояния между орбитами. Аргумент широты "u", при котором Δr имеет стационарную точку определяется из условия: $\frac{d\Delta r}{du}=0$, откуда

получаем
$$\mathrm{tg}u=\frac{A_3}{A_2}, \tag{7.20}$$

т.е. $u_1=u_0; u_2=u_0+\pi$, где $u_0=\mathrm{arctg}\frac{A_3}{A_2}$. На рис.7.2 показаны две орбиты КА и линия BD, положение которой определяется аргументом широты u_0. Экстремальные расстояния между орбитами будут равны длинам отрезков AD и BC. Используя (7.19) и (7.20), получаем

$$\begin{aligned}\Delta r_A&=|AD|=A_1+A_2\cos u_0+A_3\sin u_0\\ \Delta r_C&=|CB|=A_1-A_2\cos u_0-A_3\sin u_0\end{aligned} \tag{7.21}$$

Дифференцируя (7.19), находим радиальную скорость между точками A и D, C и B:

$$\Delta V_S=\Delta V_r=\frac{d\Delta r}{dt}=\upsilon(-A_2\sin u+A_3\cos u) \tag{7.22}$$

где $\upsilon=\frac{du}{dt}$. Из выражений (7.20) и (7.21) следует, что $\Delta V_r=0$, т.е. в точках экстремальных расстояний относительная радиальная скорость равна нулю.

Если на начальной орбите приложить два трансверсальных импульса $\Delta V_{T1},\Delta V_{T2}$ в точках с аргументами широты u_1,u_2, то возникающее при этом возмущение радиуса в функции аргумента широты находится по формуле (см.(7.8)), ($\Delta V_S=0$).

$$\Delta r'=\frac{2}{\upsilon}[\Delta V_{T1}+\Delta V_{T2}-\cos u(\Delta V_{T1}\cos u_1+\Delta V_{T2}\cos u_2)-\sin u(\Delta V_{T1}\sin u_1+\Delta V_{T2}\sin u_2)] \tag{7.23}$$

$$(\varphi_1=u-u_1,\ \varphi_2=u-u_2)$$

Чтобы переход с начальной орбиты на конечную оказался возможным необходимо выполнение тождества $\Delta r\equiv\Delta r'$ для любого значения аргумента широты "u" (начальная орбита трансформируется в переходную).

Приравнивая (7.19) и (7.23) получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}&2(\Delta V_{T1}+\Delta V_{T2})=\upsilon A_1\\ &2(\Delta V_{T1}\cos u_1+\Delta V_{T2}\cos u_2)=-\upsilon A_2\\ &2(\Delta V_{T1}\sin u_1+\Delta V_{T2}\sin u_2)=-\upsilon A_3\end{aligned} \tag{7.24}$$

В системе (7.24) неизвестными являются величины $\Delta V_{T1}, \Delta V_{T2}$, u_1, u_2, т.е. всего четыре величины. Дополнительное условие для определения четырех величин получим из условия, что переход осуществляется за счет трансверсальных составляющих импульса. Т.е.

$\Delta V_{S1} = \Delta V_{S2} = -\upsilon(-A_2 \sin u + A_3 \cos u) = 0$ (см.(7.22)). В результате получим следующие выражения для определения аргументов широты точек приложения импульсов:

$$u_1 = u_0; u_2 = u_0 + \pi \tag{7.25}$$

где $u_0 = \mathrm{arctg}\frac{A_3}{A_2}$. Тогда из системы (7.24) получим:

$$\begin{aligned} \Delta V_{T1} &= \frac{\upsilon}{4}(A_1 - A_2 \cos u_0 - A_3 \sin u_0) \\ \Delta V_{T2} &= \frac{\upsilon}{4}(A_1 + A_2 \cos u_0 + A_3 \sin u_0) \end{aligned} \tag{7.26}$$

$\upsilon = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\mu}{r}}, r -$ средний радиус орбиты $\left(r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)\right)$. Величина суммарного импульса:

$$\Delta V_{\Sigma} = |\Delta V_{T1}| + |\Delta V_{T2}| = \frac{\upsilon}{2} A_1 \tag{7.27}$$

Так как $A_1 = p_1 - p_2$;

$$p_1 = r_1 = \frac{1}{2}(r_{\text{а}1} + r_{\text{п}1}) \tag{7.28}$$

$$p_2 = r_2 = \frac{1}{2}(r_{\text{а}2} + r_{\text{п}2}) \tag{7.29}$$

Формулы (7.28) и (7.29) определяют радиусы средней круговой орбиты ($r_{\text{а}} -$радиус апогея, $r_{\text{п}} -$радиус перигея), то учитывая (7.28) и (7.29) для суммарного импульса получим выражение:

$$\Delta V_{\Sigma} = \frac{\upsilon}{2}|r_2 - r_1| \tag{7.30}$$

Если в формулах (7.26) угол u_0 увеличить на π, т.е. поменять импульсы местами, то

$$\begin{aligned} \Delta V_{T1} &= \frac{\upsilon}{4}(A_1 + A_2 \cos u_0 + A_3 \sin u_0) \\ \Delta V_{T2} &= \frac{\upsilon}{4}(A_1 - A_2 \cos u_0 - A_3 \sin u_0) \end{aligned}, \tag{7.31}$$

а величина суммарного импульса ΔV_{Σ} не изменится.

Выражение (7.26) и (7.31) показывают, что существуют две траектории двухимпульсного перехода (рис. 7.3, *а*) с начальной орбиты на конечную, эквивалентные по энергетическим затратам (*AB* и *CD*).

Поскольку импульсы, управляющие переходом, являются трансверсальными и точки приложения их разнесены на угол 180°, то переход между произвольными орбитами формально сводится к апсидальному переходу между соосными эллипсами, оси апсид которых совпадают с прямой, на которой лежат точки приложения импульсов. Такие эллипсы будем называть аналогами начальной и конечной орбит (рис.7.3,*б*).

Выражения (7.26) могут быть представлены [13] в форме:

$$\Delta V_{T1} = \frac{\upsilon}{4}(r_B - r_C), \qquad \Delta V_{T2} = \frac{\upsilon}{4}(r_D - r_A), \tag{7.32}$$

где r_A, r_B, r_C, r_D – радиусы точек A, B, C, D (рис. 7.3, *а*), в которых прикладываются импульсы. Величины радиусов могут быть определены по формулам (7.18).

$$\begin{aligned} r_A &= p_1 - p_1 e_1 \cos(u_0 - \omega_1) \\ r_B &= p_2 + p_2 e_2 \cos(u_0 - \omega_2) \\ r_C &= p_1 + p_1 e_1 \cos(u_0 - \omega_1) \\ r_D &= p_2 - p_2 e_2 \cos(u_0 - \omega_2) \end{aligned} \tag{7.33}$$

Обозначим $\Delta r_A = r_D - r_A$; $\Delta r_C = r_B - r_C$ и тогда, как следует из (7.32)

$$\Delta V_{T1} = \frac{\upsilon}{4}\Delta r_C, \; \Delta V_{T2} = \frac{\upsilon}{4}\Delta r_A, \tag{7.34}$$

где Δr_A и Δr_C находятся по формулам (7.21).

б) Двухимпульсные переходы между произвольными орбитами.

Как указывалось выше, в этом классе переходов ограничения на величины импульсов не накладываются. Естественно, что в этом случае линеаризованные уравнения движения, которыми часто пользуются для поиска нулевого приближения, можно применять лишь с большими оговорками, либо они вообще становятся неприемлемыми. По этой причине для поиска нулевого приближения применяется общая теория кеплеровского движения без линеаризации уравнений движения. Существо метода расчета переходов с большими импульсами состоит в следующем.

Пусть начальная и конечная орбита заданы элементами: (рис.7.4) $a_1, e_1, i_1, \Omega_1, \omega_1$; $a_2, e_2, i_2, \Omega_2, \omega_2$. Требуется определить орбиту перехода: a, e, i, Ω, ω из точки *A* в точку *B*, если угловое расстояние γ между точками *A* и *B* задано, а импульсы тяги прикладываются в этих точках. Решая эту задачу, получим следующие выражения для определения компонент импульсов в точках *A* и *B* в орбитальной системе координат [13].

$$\Delta V_{S1} = \frac{1}{\sin\gamma}\left[q\left(\frac{\mu}{r_1}\cos\gamma - \frac{\mu}{r_2}\right) + \frac{1-\cos\gamma}{q}\right] - V_{r_1}$$

$$\Delta V_{T1} = q\frac{\mu}{r_1}\cos\alpha_1 - V_{T1}$$

$$\Delta V_{W1} = q\frac{\mu}{r_1}\sin\alpha_1$$

$$\Delta V_{S2} = \frac{1}{\sin\gamma}\left[q\left(\frac{\mu}{r_2}\cos\gamma - \frac{\mu}{r_1}\right) + \frac{1-\cos\gamma}{q}\right] + V_{r_2}, \qquad (7.35)$$

$$\Delta V_{T2} = -q\frac{\mu}{r_2} + V_{T2}\cos\alpha_2$$

$$\Delta V_{W2} = V_{T2}\sin\alpha_2$$

где r_1, r_2 – радиусы начальной и конечной точек перехода; $V_{r_1}, V_{T1}, V_{r_2}, V_{T2}$ – соответственно радиальная и трансверсальная составляющие скорости на начальной и конечной орбитах в точках приложения импульсов; α_1 – угол между плоскостями переходной и конечной орбитами; q – свободный параметр, который связан с постоянной интеграла площадей переходной орбиты соотношением

$$q = \frac{h}{\mu}, \qquad (7.36)$$

причем $h = rV_T$. Каждому значению свободного параметра q соответствуют свои значения импульсов, прикладываемых в точках *A* и *B*, и определенная орбита, переходящая через эти точки. Чтобы получить определенное решение нужно поставить некоторое дополнительное условие (например, минимум суммарного импульса; время перехода и др.). Такого рода дополнительные условия будем называть функцией цели и обозначать $F(q)$. В общем случае функция цели

$F(q)=0$ (7.37) может определять либо дискретное множество значений $q_1, q_1, ..., q_n$, либо интервал $\{q_1, q_2\}$, либо одно значение q. Возможна ситуация, когда уравнение (7.37) не будет иметь решения в области $q > 0$, что будет свидетельствовать о невозможности осуществления перехода. Таким образом, решение задачи орбитального перехода с использованием функции цели производится в следующем порядке:

1. Формирование функции цели (7.37) по заданным дополнительным условиям.
2. Определение условий, при которых уравнение (7.37) имеет решение при $q > 0$.
3. Нахождение корней уравнения (7.37).
4. Определение импульсов $\Delta V_1, \Delta V_2$ по формулам (7.35) и множества переходных орбит, соответствующих корням $q_1, q_2, ...$ уравнения (7.37).
5. Выбор из полученного множества орбит одной, удовлетворяющей заданному критерию. В частном случае, если уравнение (7.37) имеет единственное решение, то переход также будет единственным и дополнительного анализа не потребуется.

Рассмотрим некоторые частные случаи решения поставленной задачи двухимпульсного перехода.

1. Начальная и конечная орбиты являются компланарными и заданы элементами p_1, e_1, ω_1, p_2, e_2, ω_2. Требуется определить величины импульсов и точки их приложения для обеспечения двухимпульсного перехода с начальной орбиты на конечную, если известно, что каждый из импульсов является трансверсальным.

В этом случае функция цели (7.37) будет выражать условие равенства нулю радиальных составляющих импульсов:

$$F_1(q) = \Delta V_{S1} = 0, \qquad F_2(q) = \Delta V_{S2} = 0;$$

Используя выражения для ΔV_{S1} и ΔV_{S2} из системы (7.35) получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sin\gamma}\left[q\left(\frac{\mu}{r_1}\cos\gamma-\frac{\mu}{r_2}\right)+\frac{1-\cos\gamma}{q}\right]-V_{r_1}=0\\&\frac{1}{\sin\gamma}\left[q\left(\frac{\mu}{r_2}\cos\gamma-\frac{\mu}{r_1}\right)+\frac{1-\cos\gamma}{q}\right]-V_{r_2}=0\end{aligned}\quad, \tag{7.38}$$

которая связывает между собой три величины: q,γ,u_1. Исключая q из выражений (7.38) получим соотношение:

$$\left(\frac{\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}\right)\left(V_{r_1}+V_{r_2}\right)^2=\left[\left(\frac{\mu}{r_1}-\frac{\mu}{r_2}\right)^2+\left(V_{r_1}+V_{r_2}\right)\left(\frac{\mu}{r_2}V_{r_1}+\frac{\mu}{r_1}V_{r_2}\right)\right](1+\cos\gamma) \tag{7.39}$$

Уравнение (7.39) превращается в тождество при выполнении условий:

$$V_{r_1}+V_{r_2}=0; \qquad 1+\cos\gamma=0. \tag{7.40}$$

Из второго условия (7.40) следует, что $\gamma=\pi$. Это означает, что трансверсальный переход возможен, если только корректирующие импульсы разнесены друг от друга на угловое расстояние 180°. Прямую, на которой прикладываются корректирующие импульсы трансверсального перехода и которая проходит через центр притяжения часто называют линией переключения [13].

Для определения аргумента широты u_1 воспользуемся первым из условий (7.40). Имеем:

$V_{r_1}=\sqrt{\frac{\mu}{p_1}}e_1\sin\vartheta_1$, $V_{r_2}=\sqrt{\frac{\mu}{p_2}}e_2\sin\vartheta_2$, где ϑ_1,ϑ_2 – истинная аномалия точек приложения импульсов, соответственно на начальной и конечной орбитах. Далее, $u_1=\vartheta_1+\omega_1$, $u_2=\vartheta_2+\omega_2$, причем согласно второму из условий (7.40) $u_2-u_1=\pi$. В этом случае $\vartheta_1=u_1-\omega_1$, $\vartheta_2=u_2-\omega_2=\pi+u_1-\omega_2$ и тогда

$V_{r_1}+V_{r_2}=\sqrt{\frac{\mu}{p_1}}e_1\sin(u_1-\omega_1)-\sqrt{\frac{\mu}{p_2}}e_2\sin(u_1-\omega_2)=0$. Решая это уравнение, находим:

$$\mathrm{tg}u_1=\frac{\sqrt{\frac{\mu}{p_1}}e_1\sin\omega_1-\sqrt{\frac{\mu}{p_2}}e_2\sin\omega_2}{\sqrt{\frac{\mu}{p_1}}e_1\cos\omega_1-\sqrt{\frac{\mu}{p_2}}e_2\cos\omega_2} \tag{7.41}$$

Физический смысл перехода по линии переключения, положение которой определяется аргументом широты u_1, состоит в том, что радиальные компоненты скорости в точках A и B равны и одинаково направлены, вследствие чего оказывается возможным чисто трансверсальный переход.

Из (7.41) следует, что если $\sqrt{\frac{\mu}{p_2}}e_2 >> \sqrt{\frac{\mu}{p_1}}e_1$, то $u_1 \to \omega_2$, и линия переключения стремится совпасть с линией апсид конечной орбиты. В частности, если $e_1 = 0$ (начальная орбита круговая), то $u_1 = \omega_2$ и переход начинается и завершается на линии апсид конечной орбиты.

Если $\sqrt{\frac{\mu}{p_2}}e_2 << \sqrt{\frac{\mu}{p_1}}e_1$, то $u_1 \to \omega_1$ и линия переключения стремится совпасть с линией апсид начальной орбиты. При $e_2 = 0$ (конечная орбита круговая) имеем $u_1 = \omega_1$ и переход будет апсидальным с приложением импульсов на линии апсид начальной орбиты. Для определения значения свободного параметра q умножим обе части первого уравнения (7.38) на $\sin\gamma$ и после этого положим $\gamma = \pi$. В результате чего получим следующее уравнение относительно q:

$-q\left(\frac{\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}\right) + \frac{2}{q} = 0$, откуда находим

$$q = \sqrt{\frac{2r_1 r_2}{\mu(r_1 + r_2)}} \tag{7.42}$$

Так как переход компланарный, то $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Имея ввиду, что $\gamma = \pi$, найдем из (7.35) трансверсальные составляющие импульсов:

$$\Delta V_{T1} = q\frac{\mu}{r_1} - V_{T1}; \qquad \Delta V_{T2} = -q\frac{\mu}{r_2} + V_{T2}, \tag{7.43}$$

где (см.(2.28)) $V_{T1} = \frac{h}{r_1} = \frac{\sqrt{\mu p_1}}{r_1}; \qquad V_{T2} = \frac{\sqrt{\mu p_2}}{r_2}$.

в) Рассмотрим задачу компланарного двухимпульсного перехода между круговыми орбитами с радиусами r_1 и r_2.

Каждый из импульсов является трансверсальным. Требуется определить их величины и точки их приложения. Используем результаты решения предыдущей задачи.

Так как обе орбиты являются круговыми, то $e_1 = e_2 = 0$, и поэтому положение линии переключения, как следует из соотношения (7.41) не определяется. Значит, точка приложения первого импульса ΔV_{T1} может выбираться произвольно, а точка приложения второго импульса ΔV_{T2} должна отстоять от первой точки на угловом расстоянии 180°.

Для определения величин импульсов воспользуемся формулами (7.43): $\Delta V_{T1} = q\dfrac{\mu}{r_1} - V_{T1}$; $\Delta V_{T2} = -q\dfrac{\mu}{r_2} + V_{T2}$. В нашем случае ($e_1 = e_2 = 0$) $p_1 = r_1$; $p_2 = r_2$ $V_{T1} = \sqrt{\dfrac{\mu}{r_1}} = V_{\text{кр}1}$; $V_{T2} = \sqrt{\dfrac{\mu}{r_2}} = V_{\text{кр}2}$, свободный параметр определяется формулой (7.42): $q = \sqrt{\dfrac{2r_1 r_2}{\mu(r_1 + r_2)}}$.

Таким образом, получаем:

$$\Delta V_{T1} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1\right);\ \Delta V_{T2} = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}}\left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}}\right) \quad (7.44)$$

суммарный импульс

$$\Delta V_{\Sigma} = \Delta V_{T1} + \Delta V_{T2} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}\left[\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1\right] + \sqrt{\frac{\mu}{r_2}}\left[1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}}\right]. \quad (7.45)$$

Орбитой перелета между круговыми орбитами является эллипс минимальной энергии, касающийся в апогее и перигее круговых орбит (переход Цандера-Хомана [7,10]) (рис.7.5).

Разделив (7.45) на $V_{\text{кр}}(r_1) = \sqrt{\dfrac{\mu}{r_1}}$ и обозначив $r_2/r_1 = \tilde{r}$, получим: $\Delta\tilde{V}_{\Sigma} = \Delta V_{\Sigma}/V_{\text{кр}}(r_1)$.

$$\Delta\tilde{V}_{\Sigma} = \sqrt{\frac{2\tilde{r}}{1+\tilde{r}}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{1+\tilde{r}}}\right) \quad (7.46)$$

Анализ данного уравнения показывает, что $\lim\limits_{\tilde{r}\to\infty}\Delta\tilde{V}_{\Sigma} = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414.$

Эта величина в сумме с круговой скоростью соответствует параболической скорости для точки с радиусом r_1. Из необходимого условия экстремума (7.46) $\dfrac{d\tilde{V}_{\Sigma}}{d\tilde{r}} = 0$ получаем кубическое уравнение $\tilde{r}^3 - 15\tilde{r}^2 - 9\tilde{r} - 1 = 0$, положительный корень которого $\tilde{r}_k = 15{,}58$ соответствует максимальному значению (7.46) $\max\Delta\tilde{V}_{\Sigma} = 0{,}536$. На рис.7.6 показана зависимость требуемой скорости для двухимпульсного перехода между круговыми компланарными орбитами от относительного радиуса $\tilde{r}$. Как видно из рисунка, величина первого импульса ограничена значением параболической скорости ухода в бесконечность: $\Delta\tilde{V}_1 \cong 0.414$ и в этом случае второй импульс стремится к нулю. Если величина $\tilde{r}$ становится больше некоторого предельного значения, то оптимальным по суммарной скорости становится трехимпульсный переход (см.рис.7.6). Этот переход называют также биэллиптическим, поскольку он состоит из двух эллипсов перехода. Отношение суммарного импульса к круговой скорости на начальной орбите радиуса r_1 при использовании формул

$V_{кр} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}, \qquad V_{элл} = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$ получаем в виде:

$$\Delta\tilde{V}_\Sigma = \Delta\tilde{V}_{T1} + \Delta\tilde{V}_{T2} + \Delta\tilde{V}_{T3} = \sqrt{\frac{2\tilde{r}_а}{1+\tilde{r}_а}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_а}}\left(\sqrt{\frac{2\tilde{r}}{\tilde{r}+\tilde{r}_а}} - \sqrt{\frac{2}{1+\tilde{r}_а}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}}\left(\sqrt{\frac{2\tilde{r}_а}{\tilde{r}+\tilde{r}_а}} - 1\right) \tag{7.47}$$

где $\Delta\tilde{V}_\Sigma = \dfrac{\Delta\tilde{V}_\Sigma}{\sqrt{\dfrac{\mu}{r_1}}}$; $\Delta\tilde{V}_{Ti} = \dfrac{\Delta V_{Ti}}{\sqrt{\dfrac{\mu}{r_1}}}\ (i = 1,2,3)$, $\tilde{r}_а = \dfrac{r_а}{r_1}$, $r_а$ – радиус апоцентра переходной орбиты, $\tilde{r} = \dfrac{r_2}{r_1}$.

Проведение сравнения двух- и трехимпульсных переходов приводит к следующим выводам:

– если $r_1/r_а < r_1/r_2$, то трехимпульсная программа более экономична, чем оптимальная двухимпульсная (переход по эллипсу Хомана) при $r_1/r_2 < 0.064\ (\tilde{r} \approx 15.56)$ и менее экономична при $r_1/r_2 > 0.084\ (\tilde{r} \approx 11.94)$;

– если $0.064 \le r_1/r_2 \le 0.084\ (11.94 \le \tilde{r} \le 15.56)$, в зависимости от величины отношения $r_1/r_а$ более экономичным может быть двух- или трехимпульсный переход.