Министерство образования Российской Федерации
Балтийский государственный технический университет
“ВОЕНМЕХ” им. Д. Ф. Устинова

Кафедра А5

Отчет по УНИРС

Конспект лекций по методам оптимального управления

г. Санкт-Петербург
2004 год.

Введение

Все методы оптимизации делятся на четыре группы:

- математическое программирование;
- методы оптимального управления;
- игровые методы (теория игр);
- дифференциальные игры.

Задача математического программирования.

F(x) – некоторая целевая функция (1)

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Требуется определить $x_1 - ?, \ldots, x_n - ?$ (состояние вектора x), где целевая функция принимает максимальное (минимальное) значение, и при этом выполняется ряд ограничений:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(x) &\le b_1 \\ \psi_2(x) &\le b_2 \\ &\vdots \\ \psi_k(x) &\le b_k \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Задача оптимального программирования.

$$J(u_1, u_2, \ldots, u_k) \qquad (1)$$

Требуется определить функции, при которых критерии оптимальности принимают максимальное (минимальное) значения.

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(t) - ? \\ u_2 &= u_2(t) - ? \\ &\vdots \\ u_k &= u_k(t) - ? \end{aligned}$$

и принимается ряд ограничений

$$\begin{aligned} &W_1(u_1, u_2, \ldots, u_k) \le a_1 \\ &\vdots \\ &W_m(u_1, u_2, \ldots, u_k) \le a_m \end{aligned} \qquad (2)$$

Игровые методы.

Пусть $F(x, W)$ (1)

- целевая функция, зависящая от двух векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ и $W = (W_1, W_2, \ldots, W_m)$. Требуется определить вектор параметров x, при котором целевая функция (1) принимает максимальное (минимальное) значение. При этом необходимо учесть ограничение:

$$\psi(x) = b \qquad (2)$$

и возможные значения составляющих вектора W, выбор которого от нас не зависит.

$$L(W) \le l \qquad (3)$$

при этом ограничение (3) мы знаем.

Дифференциальные игры.

$$J(u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_l) \qquad (1)$$

Пусть критерий оптимальности, который зависит от функций

$$\begin{aligned} v_1 &= v_1(t) - ? \\ v_2 &= v_2(t) - ? \\ &\vdots \\ v_l &= v_l(t) - ? \end{aligned} \tag{2}$$

выбор этих функций от нас не зависит.

$$\begin{aligned} &E_1(v_1, v_2, \ldots, v_l) \le d_1 \\ &\vdots \\ &E_\chi(v_1, v_2, \ldots, v_l) \le d_\chi \end{aligned} \tag{3}$$

но эти функции удовлетворяют критерию (3).

Постановка задачи оптимального управления

Пусть задана управляемая система, движение которой определяется векторным дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u) \tag{1}$$

$x^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $\quad$ $f^T = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ $\quad$ $u^T = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$

$$u(t) \in U \tag{2}$$

$$x(t) \in X \tag{3}$$

$x(t)$ - не могут быть произвольными, они выбираются из конкретного множества.

$$x(t_0) \in X_0 \tag{4}$$

υ-момент окончания управляемого процесса

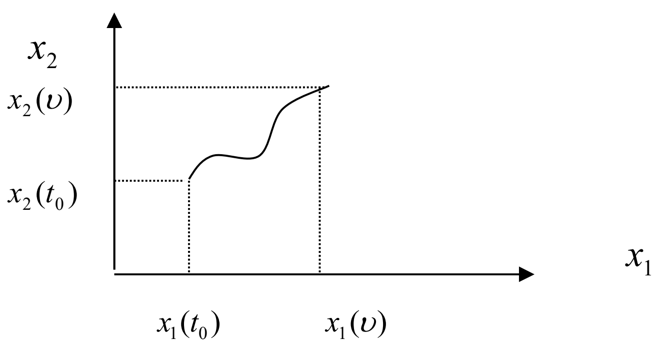
Требуется определить функции управления

$$\begin{aligned} &u_1(t) - ? \\ &u_2(t) - ? \\ &\vdots \\ &u_k(t) - ? \end{aligned} \tag{5}$$

при которых критерий оптимальности

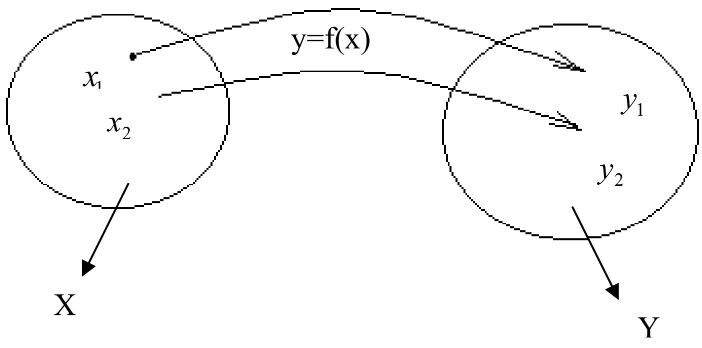
$$J = R(x(\upsilon), \upsilon) \tag{6}$$

и выполняются все ограничения (1) - (5).

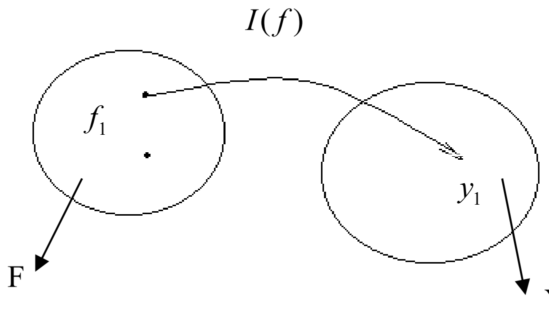


Некоторые понятия из функционального анализа

Функционал



X, Y – множества вещественных чисел.



Говорят, что задан функционал, если каждому элементу из множества F ставится в соответствие (по определенному правилу) некоторое число из множества Y.

$$I = \int_{t_0}^{\upsilon} (f(x)dx$$

Линейное нормированное пространство

При исследовании функционалов удобно использовать геометрическую интерпретацию. При исследовании задачи очень важно проявление свойства непрерывности функционалов.

Рассмотрим множество элементов $x \in E$

Введем операцию сложения элементов для этого множества:

$$\text{Пусть } \left.\begin{matrix} X \in E \\ Y \in E \end{matrix}\right\} \Rightarrow X + Y = Z \in E$$

Введем операцию произведения элемента множества на некоторое число:

$X \in E$

$\lambda - \textit{число}$

$\lambda \cdot X = Z \in E$

$-X = (-1) \cdot X$

Множество элементов E является линейным пространством, если для элементов множества введены 2 операции, при одном условии, если для этих элементов выполняются следующие свойства:

$`X, Y \in E, Z \in E$

$1) X + Y = Y + X$

$2)(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$

$3)\lambda, \mu - числа$

$4)\lambda(\mu \cdot X) = (\lambda \cdot \mu) \cdot X$

$5)\lambda(X + Y) = \lambda X + \lambda Y$

$6)(\lambda + \mu) \cdot X = \lambda X + \mu X$

Приведем примеры линейных пространств:
Множество векторов есть линейное пространство.
Рассмотрим множество непрерывных функций на некотором заданном интервале.

Введем понятие нормы в линейном пространстве:
$\|X\|$(норма элемента X – это число, определяемое по некоторому правилу (это правило должно удовлетворять свойствам))

$1)\|X\| \geq 0; \|X\| = 0, при X \neq 0$

$2)\|\lambda X\| = |\lambda| \cdot \|X\|$

$3)\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$

Чем > $\|X\|$, тем дальше он находится от '0'-го элемента.

Расстояние между элементами: $\rho(x, y) = \|x - y\|$

Свойства:

$1)\rho(x, y) \geq 0$

$\rho(x, y) = 0, при\ x = y$

$2)\rho(x, y) = \rho(y, x)$

$3)\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Если расстояние мало, то эти элементы близки.
Рассмотрим пример:

$x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Рассмотрим множество непрерывных функций и определим норму:
f(x)-один из элементов множества функций.

$a \leq x \leq b$

$\|f(x)\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$

C_0-множество непрерывных функций.

Рассмотрим множество непрерывных функций - C_1, которое имеет хотя бы одну непрерывную производную:

$$\|f(x)\|_{C_1} = max_{a \le x \le b}|f(x)| + max_{a \le x \le b}|f'(x)|$$

(иногда берут большую из этих величин.)

C_2 - класс непрерывных функций, которые имеют не только 1-ю, но и 2-ю производную.

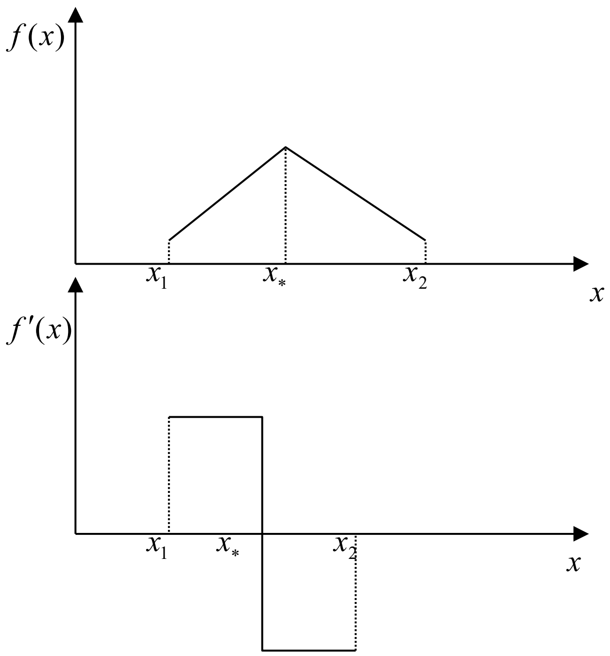
$\vdots$

C_n

$$\|f(x)\| = \sum_{k=0}^{n} max_{a \le x \le b}|f^k(x)|$$

Элемент принадлежит какому-либо линейному нормируемому пространству, если его норма является конечной величиной.

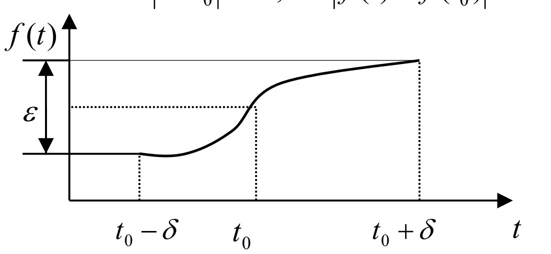
В классе C_0 $\|f(x)\|_{C_0} = f(x_*)$, в классе C_1 $\|f(x)\|_{C_1} = \infty$



Непрерывность функционала.

$f(t)$ - функция.

$f(t)$ непрерывна в некоторой точке t_0, если по любому $\varepsilon > 0$ можно найти такое δ >0, что как только $|t - t_0| < \delta$, то $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$



$\Rightarrow$ введем понятие непрерывности функционала.

Говорят, что функционал $I(x)$ непрерывен в точке x_0, если по любому $\varepsilon > 0$,можно указать такое $\delta > 0$, что как только $\|x(t) - x_0(t)\| < \delta$, так $|I(x) - I(x_0)| < \varepsilon$

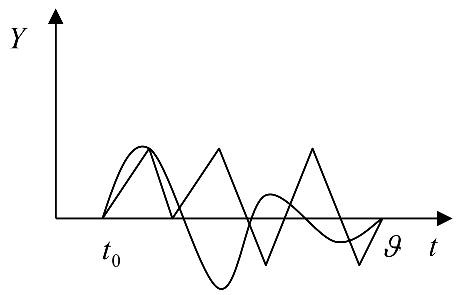
$$I = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} L(t, x(t))dt$$

Пример:

$$I = \int_{t_0}^{\vartheta} \sqrt{1 + \dot{Y}^2}\,dt$$

$$\dot{Y} = \frac{dY}{dt}$$

$$Y(t_0) = Y_0, Y(\vartheta) = Y_\vartheta$$



Сравним эти функции в классе C_0:

$$\|Y_1(t)\|_{C_0} = \|Y_2(t)\|_{C_0}$$

В классе C_1:

$$I = \int_{t_0}^{\vartheta} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt$$

Такие функционалы обладают непрерывностью в классе C_1.

Введем понятие линейного функционала:

Функционал $I(x)$ является линейным, если он непрерывен и выполняется 2 следующих свойства:

1)$x \to x_1 + x_2$

$I(x_1 + x_2) = I(x_1) + I(x_2)$

2)$x \to \lambda x$

$I(\lambda x) = \lambda \cdot I(x)$

Приведем пример линейных функционалов:

$$I = \int_{t_0}^{\vartheta} Y(t)dt$$

Линейность $I(t)$ не обязательна.

$$I = \int_{t_0}^{\vartheta} A(t) \cdot Y(t)dt$$

A(t)-фиксированная функция.

I(t) также является линейным.

Пример:

Пусть $I = \int_{t_0}^{\vartheta} x^2(t)dt$

Если $x \to x_1 + x_2$, то

$$I = \int_{t_0}^{\vartheta} (x_1 + x_2)^2 dt = \int_{t_0}^{\vartheta} {x_1}^2 dt + \int_{t_0}^{\vartheta} {x_2}^2 + \int_{t_0}^{\vartheta} 2 \cdot x_1 \cdot x_2 dt$$

(из-за этого слагаемого функционал является нелинейным).

Дифференцируемость функционала. 1-я и 2-я вариации функционала.

Пусть $f(t)$ - дифференцируема в некоторой точке, если при переходе $t \to t + \Delta t$, приращение функции можно представить в виде:

$$\Delta f = f(t + \Delta t) - f(t) = f'(t) \cdot \Delta t + \varepsilon(\Delta t)$$

$df = f'(t) \cdot \Delta t$ (это и есть дифференциал функции).

Дифференциал можно вычислить и другим способом:

$t \to t + \alpha \cdot \Delta t$

α - некоторое число, Δt - приращение.

t *и* Δt зафиксируем и будем менять α.

$$f(t + \alpha \cdot \Delta t) = \Phi(\alpha);$$

Найдем:

$$\lim \frac{\Phi(\alpha) - \Phi(0)}{\alpha} = \left.\frac{d\Phi}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \left.\frac{df(t + \alpha \cdot \Delta t)}{d(t + \alpha \cdot \Delta t)} \cdot \frac{d(t + \alpha \cdot \Delta t)}{\alpha}\right|_{\alpha=0} = \frac{df}{dt} \cdot \Delta t = df$$

(т. к. Φ не зависит от $f(t + \alpha \cdot \Delta t)$ и производная от $\alpha = 1$)

Функционал $I(x)$ дифференцируем в точке x,если при переходе $x \to x(t) + \delta x(t)$ приращение можно представить:

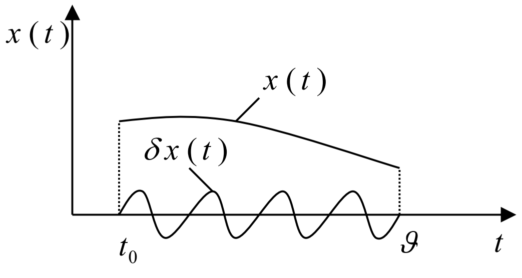
$$I = I(x + \delta x) - I(x) = I_1(x, \delta x) + \varepsilon(x, \delta x) \cdot \|\delta x\|$$

,где I_1-это линейный функционал относительной функции $\delta x(t)$, а ε - составляющая большего порядка малости.

$$\lim \varepsilon(x, \delta x) = 0$$

$$\|\delta x(t)\| \to 0$$

$\delta x(t)$ -функция, которая называется функцией вариации $x(t)$, т. е. Функция, принадлежащая тому же классу функций, что и $x(t)$, только норма этой функции должна быть мала.



I_1 называется 1-ым дифференциалом функционала или 1-ой вариацией функционала.
$\delta I = I_1(x, \delta x)$
Найдем дифференциал функционала:

Пример№1.

$$I = \int_{t_0}^{\vartheta} A(t) \cdot x(t) dt$$

$$x(t) \to x(t) + \delta x(t)$$

$$\Delta I = \int_{t_0}^{\vartheta} A(t)(x + \delta x) dt - \int_{t_0}^{\vartheta} A(t) x(t) dt = \int_{t_0}^{\vartheta} A(t) \delta x(t) dt$$

$$\delta I = \int_{t_0}^{\vartheta} A(t) \delta x(t) dt$$

Функционал является линейным относительно $\delta x(t)$.
Пример№2.

$$I = \int_{t_0}^{\vartheta} L(t, x(t)) dt$$

$$x(t) \to x(t) + \delta x(t)$$

$$\Delta I = \int_{t_0}^{\vartheta} L(t, x(t) + \delta x(t)) dt - \int_{t_0}^{\vartheta} L(t, x(t)) dt$$

Если L является непрерывной и дифференцируемой, то разность можно представить по формуле Тейлора:

$$L(t, x(t) + \delta x(t)) - L(t, x(t)) = \frac{\partial L}{\partial x} \delta x(t) + \varepsilon_1(\delta x) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ приращенная формула:

$$\Delta I = \int_{t_0}^{\vartheta} \left[\frac{\partial L}{\partial x} \delta x(t) \right] dt + \varepsilon_2(\delta x)$$

Если ε_2 достаточно мала, то этот интеграл называется 1-ой вариацией функционала.

$$\boxed{\delta I = \int_{t_0}^{\vartheta} \left[\frac{\partial L}{\partial x} \delta x(t) \right] dt}$$

Если для вычисления вариации функционала мы можем использовать формулу Тейлора, то этот функционал называют “сильным” дифференциалом или дифференциалом Фреше.

Второй путь вычисления вариаций функционала:
Пусть $I(x)$
$x(t) \to x(t) + \alpha \cdot \delta x(t)$
Теперь зафиксируем $x(t)$ и будем варьировать α:

$$I(x+\alpha\cdot\delta x(t))=\Phi(\alpha)$$

Найдем:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\Phi(\alpha)-\Phi(0)}{\alpha}=\left.\frac{d\Phi}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=D\cdot I(x)$$

Этот дифференциал называют “слабым” или дифференциалом Гато (или дифференциалом по направлению) .

Если для функционала можно вычислить как “сильный”, так и “слабый” дифференциал, то они совпадают.

В некоторых случаях мы можем вычислить “слабый”, но не можем “сильный” дифференциал (если можем, то результат тот же).

Пример№1.

$$I=\int_{t_0}^{\vartheta}L(t,x(t),\dot{x}(t))dt$$

$$x(t)\to x(t)+\delta x(t)$$

$$\Delta I=I(x+\delta x)-I(x)=\int_{t_0}^{\vartheta}\left[L(t,x+\delta x,\dot{x}+\delta\dot{x})-L(t,x,\dot{x})\right]dt$$

Пусть L – непрерывная функция.

$$L(t,x+\delta x,\dot{x}+\delta\dot{x})-L(t,x,\dot{x})=\frac{\partial L}{\partial x}\delta x+\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\delta\dot{x}+\varepsilon(\delta,\delta\dot{x})=\int_{t_0}^{\vartheta}\left[\frac{\partial L}{\partial x}\delta x(t)+\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\delta\dot{x}(t)\right]dt+\varepsilon_1(\delta x,\delta\dot{x})$$

Если ε мала, то:

$$\delta I=\int_{t_0}^{\vartheta}\left[\frac{\partial L}{\partial x}\delta x(t)+\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\delta\dot{x}(t)\right]dt$$

Второй подход:

$x(t)\to x(t)+\alpha\cdot\delta x(t)$

Меняется только α.

$$DI=\frac{d}{d\alpha}\left(\int_{t_0}^{\vartheta}L(t,x+\alpha\cdot\delta x,\dot{x}+\alpha\cdot\delta\dot{x})\ \Big|_{\alpha=0}dt\right)+\int_{t_0}^{\vartheta}\left.\frac{d\ L(t,x+\alpha\cdot\delta x,\dot{x}+\alpha\cdot\delta\dot{x})}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}dt=$$

$$=\int_{t_0}^{\vartheta}\left[\frac{\partial L}{\partial(x+\alpha\cdot\delta x)}\cdot\frac{d(x+\alpha\cdot\delta x)}{d\alpha}+\frac{\partial L}{\partial(\dot{x}+\alpha\cdot\delta\dot{x})}\cdot\frac{d(\dot{x}+\alpha\cdot\delta\dot{x})}{d\alpha}\right]dt=$$

$$=\int_{t_0}^{\vartheta}\left[\frac{\partial L}{\partial x}\delta x+\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\delta\dot{x}\right]dt$$

Второй дифференциал или вторая вариация функционала.

$I(x)$ - дважды дифференцируем в точке x. Если при $x(t)\to x(t)+\delta x(t)$ приращение функционала

$$\Delta I = I(x+\delta x) - I(x) = I_1(x,\delta x) + I_2(x,\delta x) + \varepsilon(x,\delta x)\|\delta x\|^2 = \lim_{\|\delta x(t)\|\to 0} \varepsilon(x,\delta x) = 0$$

$I_1(x,\delta x) = \delta x$ - 1-я вариация функционала.

$I_2(x,\delta x) = \delta^2 I$ - 2-ой дифференциал или 2-я вариация функционала.

Вторую вариацию функционала можно получить или используя формулу Тейлора или используя <u>2-ой подход:</u>

$$\delta^2 I = \left.\frac{d^2 I(x+\alpha\cdot\delta x)}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0} = \left.\frac{d\ \delta I(x+\delta x)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}$$

$$\left.\frac{d}{d\alpha}(\partial I(x+\alpha\delta x, \dot{x}+\alpha\delta\dot{x}))\right|_{\alpha=0} = \int_{t_0}^{\vartheta} \left.\frac{d\left[\frac{\partial L}{\partial x}(x+\alpha\delta x, \dot{x}+\alpha\delta\dot{x})\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x+\alpha\delta x, \dot{x}+\alpha\delta\dot{x})\delta\dot{x}\right]}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} dt =$$

$$= \int_{t_0}^{\vartheta}\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)}{\partial(x+\alpha\delta x)}\frac{d(x+\alpha\delta x)}{d\alpha x}\delta x + \frac{\partial\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)}{\partial(\dot{x}+\alpha\delta\dot{x})}\frac{d(\dot{x}+\alpha\delta\dot{x})}{d\alpha}\delta\dot{x} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)}{\partial(x+\alpha\delta x)}\frac{d(x+\alpha\delta x)}{d\alpha}\delta\dot{x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)}{\partial(\dot{x}+\alpha\delta\dot{x})}\frac{d(\dot{x}+\alpha\delta\dot{x})}{d\alpha}\delta\dot{x}\right]\Bigg|_{\alpha=0} dt =$$

$$= \int_{t_0}^{\vartheta}\left[\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\delta x)^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial\dot{x}}(\delta x,\delta\dot{x}) + \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial\dot{x}}(\delta x,\delta\dot{x}) + \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^2}(\delta\dot{x})^2\right]dt =$$

$$= \int_{t_0}^{\vartheta}\left[\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial\dot{x}}(\delta x,\delta\dot{x}) + \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^2}(\delta\dot{x})^2\right]dt$$

Простейшая задача вариационного исчисления.

Требуется найти max или min

$$I = \int_{t_0}^{\vartheta} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \qquad (1)$$

Функционал непрерывен и дифференцируем.

при $t = t_0, \quad x(t_0) = x_0$ (2)

$t = \vartheta, \quad x(\vartheta) = x_\vartheta$ (3)

Пусть $\tilde{x}$ - решение задачи.

Необходимым условием экстремума функционала является равенство “0” ого первой вариации.

т.е. $\delta I(\tilde{x}) = 0$

Пусть $\tilde{x} \to \tilde{x} + \alpha\delta x(t)$

Рассмотрим *I*, как функцию, зависящую от α :

$I(\tilde{x}+\alpha\delta x)=\Phi(\alpha)$

$$\left.\frac{d\Phi}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=\left.\frac{dI(\tilde{x}+\alpha\delta x)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=\delta I(\tilde{x})=0 \qquad (4)$$

$\Rightarrow$ нужно записать выражение для функционала (1) и приравнять его к “0”.

$$\delta I=\int_{t_0}^{\vartheta}\left[\frac{\partial L}{\partial x}\delta x(t)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x}(t)\right]dt=0 \qquad (5)$$

возьмем по частям:

$$\int u\,dv=u\,dv-\int v\,du$$

$$u=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

$$dv=\delta x(t)=\frac{d\delta x}{dt}$$

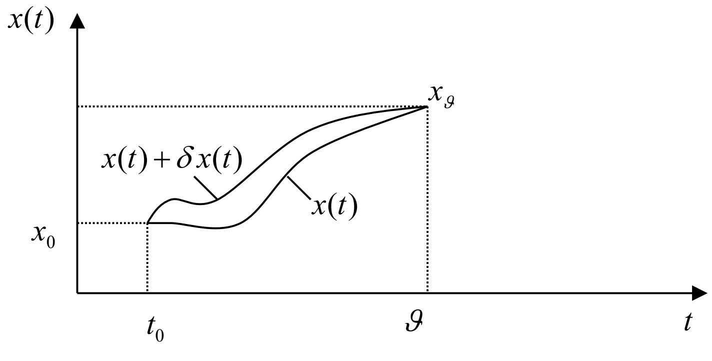
$$\int_{t_0}^{\vartheta}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta\dot{x}\,dt=\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\right|_{t_0}^{\vartheta}-\int_{t_0}^{\vartheta}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x(t)dt \qquad (6)$$

тогда (5) с учетом (6):

$$\int_{t_0}^{\vartheta}\left[\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right]\delta x(t)dt+\left.\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right|_{t=\vartheta}\delta x_{\vartheta}-\left.\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right|_{t=t_0}\delta x_{t_0}=0 \qquad (7)$$

т.к. нам заданы условия (8):

$$\begin{cases}\delta x(t_0)=0\\ \delta x(\vartheta)=0\end{cases} \qquad (8)$$



$$\Rightarrow\int_{t_0}^{\vartheta}\left[\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right]\delta x(t)dt=0 \qquad (9)$$

Используя лемму Дебуа-Реймонда (или лемму Лагранжа)

$$\left[\begin{array}{l}\textit{Если есть}\int_a^b f(t)\delta x(t)dt=0\\ \textit{при этом}\ \delta x(a)=\delta x(b)=0\\ \textit{то это может быть только в том случае, что} f(t)=0\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \qquad (10)$$ – уравнение Эйлера.

$\Rightarrow x(t)$ должна удовлетворять уравнению Эйлера.

Уравнение Эйлера – обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка.

Пример:

$I = \int_{t_0}^{\vartheta} \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt$

$t = t_0,\ x(t_0) = x_0$

$t = \vartheta,\ x(\vartheta) = x_\vartheta$

Нужно найти $x(t)$,при котором интеграл принимает min-е значение.

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Leftarrow \quad L = \sqrt{1+\dot{x}^2}$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}$

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}\right) = \frac{\left[\ddot{x}\sqrt{1+\dot{x}^2} - \dot{x}\frac{\dot{x}\ddot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}\right]}{(1+\dot{x}^2)} = \frac{\ddot{x} + \ddot{x}\dot{x}^2 - \dot{x}^2\ddot{x}}{(1+\dot{x}^2)} = 0$$

$\ddot{x} = 0$

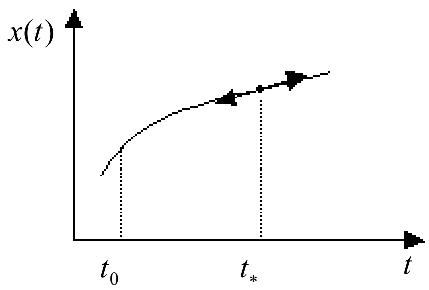
$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$

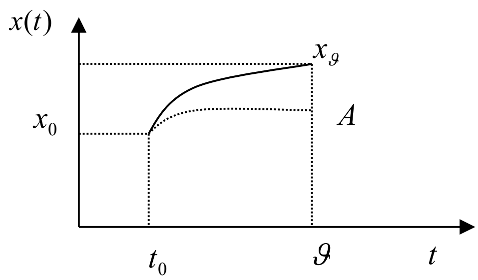
$\frac{dx}{dt} = c_1$

$x(t) = c_1 t + c_2$

При интегрировании этого уравнения всегда проявляются две неизвестные константы c_1 и c_2.

Их находим из граничных условий. Получим двухточечную краевую задачу.





Простейшая векторная задача вариационного исчисления.

(необходимо найти минимум или максимум)

$$I = \int_{t_0}^{\vartheta} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \tag{1}$$

$x^T(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$

$$x(t) \to x(t) + \alpha \cdot \delta x(t) \tag{2}$$

$$t = \vartheta; x_1(\vartheta) = x_{1\vartheta}; \ldots; x_n(\vartheta) = x_{n\vartheta}. \tag{3}$$

Нужно найти n-функцию.

Необходимые условия получим из 1-ой вариации функционала.

t_0

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n} \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n} \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n}\right) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

-система уравнений Эйлера-Пуассона.

Каждое уравнение – это дифференциальное уравнение 2-го порядка. Следовательно, получается по две константы с каждого уравнения.

$$\begin{cases} C_1, C_2 \\ C_3, C_4 \\ \vdots \\ C_{(2n-1)}, C_{2n} \end{cases} \Rightarrow \text{получаем 2n–констант.}$$

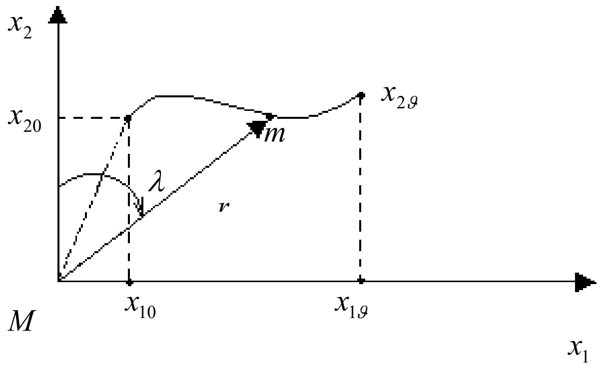
Для определения этих констант у нас есть n-условий при $t = t_0$ и n-условий при $t = \vartheta$, следовательно, задача может быть решена.

Задача Кеплера-Ньютона:

Рассмотрим движение материальной точки с массой m под действием гравитационной силы, которая обусловлена наличием в начале координат тела с массой M (планета).

$$t = t_0; x_1 = x_{10}; x_2 = x_{20} \tag{1}$$

$$t = \vartheta; x_1 = x_{1\vartheta}; x_2 = x_{2\vartheta}. \tag{2}$$



Определить траекторию при движении по которой функция

$$I = \int_{t_0}^{\vartheta} (T - u)dt \tag{3}$$

будет принимать min - е значение,
где Т-кинетическая энергия точки; *u*- потенциальная (простейшая векторная задача вариационного исчисления).

Перейдем от прямоугольной системы координат к полярной.

$$T = \frac{mV^2}{2} \tag{4}$$

$$x_1 = r\sin\lambda$$

$$x_2 = r\cos\lambda$$

$$\dot{V}^2 = (\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2$$

$$\left.\begin{aligned} V_r &= \dot{r} \\ V_\lambda &= r\dot{\lambda} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$T = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\lambda}^2}{2} \tag{6}$$

$$u = -\frac{\mu m}{r} \tag{7}$$

$\mu = M\gamma = g_з R^2{}_з$

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\lambda}^2}{2} + \frac{\mu m}{r} \tag{8}$$

Введем вектор $x = \begin{bmatrix} r \\ \lambda \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \tag{9}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial r} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right) = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

$$\underbrace{mr\dot{\lambda}^2 - \frac{\mu m}{r^2}}_{\frac{\partial L}{\partial r}} - \frac{d}{dt}(m\dot{r}) = 0 \qquad (11)$$

$$-\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\lambda}) = 0 \qquad (12)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\lambda}{dt}\right)^2 = -\dfrac{\mu}{r^2} \\ \dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\lambda}^2) = 0 \end{cases} \qquad (13),(14)$$

(13) можно продифференцировать, следовательно, решение (13):

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\lambda} \qquad (15) -$$

уравнение конического сечения.
ε - эксцентриситет.
При $\varepsilon = 0$ - окружность.
$\varepsilon = 1$ - парабола.
$0 \le \varepsilon \le 1$ - эллипс.
$\varepsilon > 1$ - гипербола.

Задача со свободными концами траектории

$$I = \int_{t_0}^{\vartheta} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \qquad (1)$$

$$t_0 - ?, \quad x(t_0) - ? \qquad (2)$$

$$\vartheta - ?, \quad x(\vartheta) - ? \qquad (3)$$

$x(t) - ?$

$t_0, x(t_0)$

$\vartheta, x(\vartheta)$

Для того, чтобы не было противоречий с предыдущими заданиями, решение будем искать среди кривых, удовлетворяющих уравнению Эйлера.

$$\begin{cases} t = t_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (4)$$

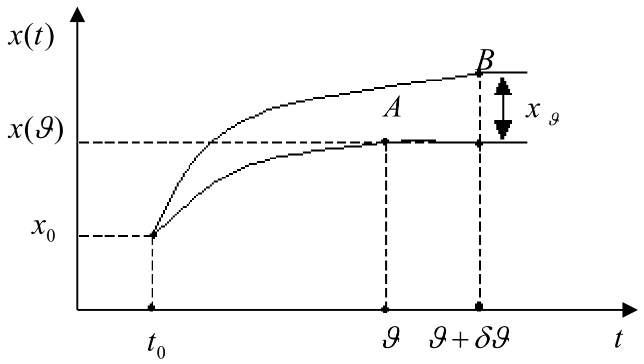
$\delta I = 0$;

Учитывая, что правый конец подвижен:

$x(t) \to x(t) + \delta x(t)$

$\vartheta \to \delta\vartheta$

$\delta\vartheta, \delta x_{\vartheta}$ -вариации предельных значений.



Выразим вариацию через $\delta\vartheta, \delta x_{\vartheta}$:

$$\delta I(\delta\vartheta, \delta x_{\vartheta}) = 0 \tag{5}$$

$x(t) \to x(t) + \delta x(t); \quad \vartheta \to \delta\vartheta$

$$\Delta I = \int_{t_0}^{\vartheta+\delta\vartheta} L(t, x+\delta x, \dot{x}+\delta\dot{x}) - \int_{t_0}^{\vartheta} L(t, x, \dot{x}) = \int_{t_0}^{\vartheta} \underbrace{\left[L(t, x+\delta x, \dot{x}+\delta\dot{x}) - L(t, x, \dot{x})\right]}_{\mathrm{I}} dt + \\ + \int_{\vartheta}^{\vartheta+\delta\vartheta} L(t, x+\delta x, \dot{x}+\delta\dot{x}) dt \tag{6}$$

для I воспользуемся формулой Тейлора:

$$\int_{t_0}^{\vartheta} \left[L(t, x+\delta x, \dot{x}+\delta\dot{x}) - L(t, x, \dot{x})\right] dt = \int_{\vartheta}^{\vartheta} \left[\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x} + \varepsilon(\delta x, \delta\dot{x})\right] dt = \tag{7}$$

(интеграл от 2-го слагаемого возьмем по частям)

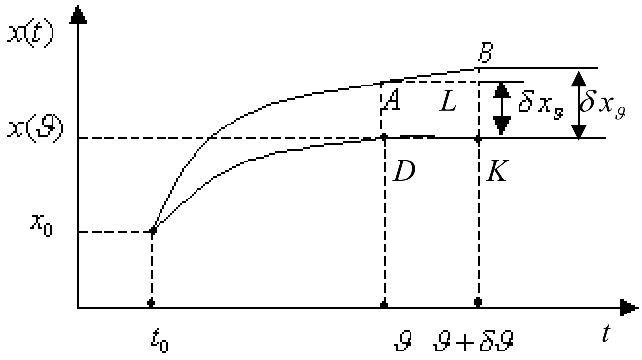
$$= \int_{t_0}^{\vartheta} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right] \delta x \, dt + \left[\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t_0}^{\vartheta}\right] \delta x(t) + \varepsilon_1(\delta x, \delta\dot{x}) =$$

$$\delta x(t_0) = 0 \qquad (7), \qquad \delta x(\vartheta) \neq 0 \tag{8}$$

$$= \int_{t_0}^{\vartheta} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right] \delta x \, dt + \left[\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t=\vartheta}\right] \delta x(\vartheta) + \varepsilon_1(\delta x, \delta\dot{x}) \tag{9}$$

$$\int_{\vartheta}^{\vartheta+\delta\vartheta} L(t, x+\delta x, \dot{x}+\delta\dot{x}) dt = L\big|_{t=\vartheta} \delta\vartheta + \varepsilon_2(\delta\vartheta) \tag{10}$$

$$\delta I = \int_{t_0}^{\vartheta} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right] \delta x(t) \, dt + \left[\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t=\vartheta}\right] \delta x(\vartheta) + L\big|_{t=\vartheta} \delta\vartheta \tag{11}$$



$\delta x(\vartheta) \neq \delta x_\vartheta$

$BL \approx \frac{d}{dt}[x(t)+\delta x(t)]\delta\vartheta$

$x_\vartheta = BK \approx \delta x(\vartheta)$

$$\delta x_\vartheta = BK \approx \delta x(\vartheta) + \dot{x}\big|_{t=\vartheta}\delta\vartheta \qquad (12)$$

$$\delta x(\vartheta) \approx \delta x_\vartheta - \dot{x}\big|_{t=\vartheta}\delta\vartheta \qquad (13)$$

$$\delta I = \int_{t_0}^{\vartheta}\left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right]\delta x(t)\,dt + \left[L - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x}\right]\Bigg|_{t=\vartheta}\delta\vartheta + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\bigg|_{t=\vartheta}\right]\delta x_\vartheta = 0 \qquad (14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \qquad (15)$$

$\delta\vartheta, \delta x_\vartheta$ -между собой не зависимы.

$$\left[L - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x}\right]\Bigg|_{t=\vartheta}\delta\vartheta = 0 \qquad (16)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\Bigg|_{t=\vartheta}\delta x_\vartheta = 0 \qquad (17)$$

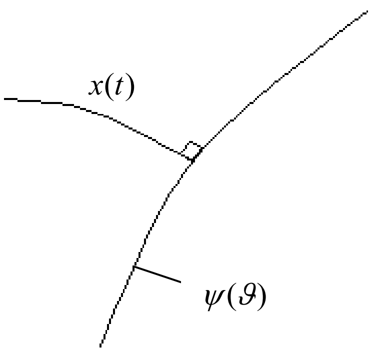
мы получили необходимые условия (15),(16),(17)
(16),(17)- называются условиями трансверсальности.

$$\left[L - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x}\right]\Bigg|_{t=\vartheta}\delta\vartheta + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\Bigg|_{t=\vartheta}\delta x_\vartheta = 0 \qquad (18)$$

$$\delta x_\vartheta = \dot{\psi}(\delta)\delta\vartheta \qquad (19)$$

$(19) \rightarrow (18), \Rightarrow$

$$L + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)[\dot{\psi} - \dot{x}]\Bigg|_{t=\vartheta} = 0 \qquad (20)$$



Каждая прямая, удовлетворяющая решению, должна подходить под прямым углом (требуемое условие оптимальности)

Воспользуемся (16),(17) для решения задачи:

$C_1, C_2 - ? \quad \vartheta - ?$

$t = t_0, x(t_0) = x_0 \rightarrow C_1$

Для определения C_2 воспользуемся условием (17):

$x(\vartheta) - ? \to \delta x_{\vartheta} \neq 0 \to (17)$

Чтобы (17) выполнялось:

$$\left.\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right|_{t=\vartheta} = 0 \tag{21}$$

Для определения момента ϑ воспользуемся условием (16):

$$\left.\left[L - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x}\right]\right|_{t=\vartheta} = 0 \tag{22}$$

$(21) \to C_2$

$$\delta I = \int_{t_0}^{\vartheta}\left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right]dt + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)\delta\vartheta + \left.\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right|_{t=\vartheta}\delta x_{\vartheta} = 0;$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right] = 0;$$

$$\left.\left[L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right]\right|_{t=\vartheta}\delta\vartheta = 0;$$

$$\left.\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right|_{t=\vartheta}\delta x_{\vartheta} = 0;$$

Выражение для первой вариации функционала в том случае, когда свободен не только правый, но и левый конец траектории.

$$\delta I = \int_{t_0}^{\vartheta}\left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right]dt + \left.\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)\right|_{t=\vartheta}\delta\vartheta - \left.\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)\right|_{t=t_0}\delta t_0 + \left.\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right|_{t=\vartheta}\delta x_{\vartheta} - \left.\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right|_{t=t_0}\delta x_{t_0} = 0;$$

функции удовлетворяют уравнению Эйлера:

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \tag{24}$$

и 4-м условиям трансверсальности:

$$\left.\left[L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right]\right|_{t=\vartheta}\delta\vartheta = 0; \tag{25}$$

$$\left.\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right|_{t=\vartheta}\delta x_{\vartheta} = 0; \tag{26}$$

$$\left.\left[L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right]\right|_{t=t_0}\delta t_0 = 0; \tag{27}$$

$$\left.\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right|_{t=t_0}\delta x_{t_0} = 0; \tag{28}$$

$C_1, C_2 - ?$

$$\delta x_\vartheta \neq 0 \Rightarrow из\,(26) \Rightarrow \left.\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right|_{t=\vartheta} = 0 \tag{29}$$

$\Rightarrow C_1$

$x(t_0)-? \Rightarrow \delta x_\vartheta \neq 0 \Rightarrow$

$$из\ (28) \Rightarrow \left.\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right|_{t=t_0} = 0; \tag{30}$$

$\Rightarrow C_2$

$\vartheta - ? \Rightarrow \delta\vartheta \neq 0 \Rightarrow (25) \Rightarrow$

$$\left.\left[L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right]\right|_{t=\vartheta} = 0 \tag{31}$$

$t_0 - ? \Rightarrow \delta t_0 \neq 0 \Rightarrow (27)$

$$\left.\left[L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right]\right|_{t=t_0} = 0 \tag{32}$$

$(32) \Rightarrow t_0$

Рассмотрим задачу со свободным концом траектории, когда x-вектор.

$x^T = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = 0 \\ \qquad\vdots \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_n}\right) = 0 \end{cases} \tag{33}$$

Условия трансверсальности:

$$\left.\left[L - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)^{\mathrm{T}} \dot{x}\right]\right|_{t=\vartheta} \delta\vartheta = 0 \tag{34}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_n} \end{bmatrix}; \qquad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}$$

$$\left.\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)^T\right|_{t=\vartheta} \delta x_\vartheta = 0 \tag{35}$$

$$\delta x_\vartheta = \begin{bmatrix} \delta x_{1\vartheta} \\ \vdots \\ \delta x_{n\vartheta} \end{bmatrix}$$

ABC=(AB)C и т.д. …

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\right)\delta x_{i\vartheta}=0 \tag{36}$$

$\delta x_{1\vartheta},\ldots\delta x_{n\vartheta}$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)\Bigg|_{t=\vartheta}\delta x_{i\vartheta}=0 \tag{37}$$

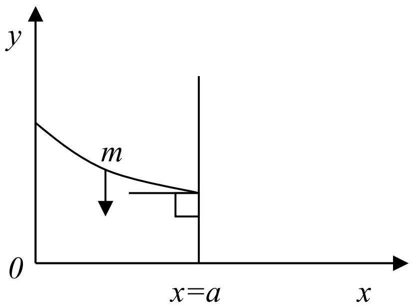
$$x_1(\vartheta)=x_{1\vartheta} \tag{38}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)\Bigg|_{t=\vartheta}\delta x_{1\vartheta}=0 \tag{39}$$

Этим условием воспользоваться не можем, т.к. (38)

Задача о брахистохроне

Рассмотрим движение материальной точки под действием силы тяжести по некоторой кривой, трение не учитывается.



y(x)-?
при движении по которой функционал:

$$I=\int_0^a\sqrt{\frac{1+\dot{y}^2}{2g(y_0-y)}}dx \tag{1}$$

при x=0; $y(0)=y_0$ (2)

x=a; y(a)-? (3)

$$\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)=0 \tag{4}$$

Условия трансверсальности:

$$\left[L-\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)\dot{y}\right]\Bigg|_{t=\vartheta}\delta x_a=0 \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)\Bigg|_{x=a}\delta y_a=0 \tag{6}$$

$x=a\rightarrow\delta x_a=0\rightarrow\cancel{(5)}$

$y(a)\rightarrow ?\rightarrow\delta y_a\neq 0\ \Rightarrow$ воспользуемся (6):

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)\Bigg|_{x=a}=0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \left.\frac{\dot{y}}{\sqrt{2g(y_0 - y)}\sqrt{1+\dot{y}^2}}\right|_{x=a} = 0 \tag{8}$$

$$\dot{y}\big|_{x=a} = 0 \tag{9}$$

Задача Лагранжа на условный экстремум

$$I = \int_{t_0}^{\vartheta} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \tag{1}$$

$$t = t_0, x(t_0) = 0 \tag{2}$$

$$t = \vartheta, x(\vartheta) = x_\vartheta \tag{3}$$

$$g(t, x(t)) = \begin{bmatrix} g_1(t, x(t)) \\ \vdots \\ g_m(t, x(t)) \end{bmatrix} = 0 \tag{4}$$

Пусть $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = 0$

и пусть $g_1 = (t, x(t), \dot{x}(t)) = 0$ (5)

$x_2(t) = f(x_1(t))$

Для решения задачи (1),(2),(3),(5) составим функционал:

$$I_1 = \int_{t_0}^{\vartheta} \Phi\, dt \tag{6}$$

$$\Phi = L + \lambda \cdot g(t, x_1(t), x_2(t)) \tag{7}$$

λ - неопределенный множитель Лагранжа.

т.к. левый и правый конец закреплен, то:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g_1}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g_1}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = 0 \tag{10}$$

$$\delta I = \int_{t_0}^{\vartheta}\left[\frac{\partial L}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial L}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\delta \dot{x}_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\delta \dot{x}_2\right]dt =$$

$$= \int_{t_0}^{\vartheta}\left\{\left[\frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)\right]\delta x_1(t) + \left[\frac{\partial L}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)\right]\delta x_2(t)\right\}dt = 0 \tag{11}$$

$x_1(t) \to x_1(t) + \delta x_1(t)$

$x_2(t) \to x_2(t) + \delta x_2(t)$

$$g_1(t, x_1(t) + \delta x_1(t), x_2(t) + \delta x_2(t)) = 0 \tag{12}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta g_1 = g_1(t, x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2) - g_1(t, x_1, x_2) = 0 \tag{13}$$

$$g_1 = \frac{\partial g_1}{\partial x_1}\delta x_1(t) + \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\delta x_2(t) + \varepsilon(\delta x_1(t), \delta x_2(t)) = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\delta x_1(t) + \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\delta x_2(t) = 0 \tag{15}$$

$(15)\lambda \to (11)$

$$\delta I = \int_{t_0}^{\vartheta}\left\{\left[\frac{\partial L}{\partial x_1} + \lambda\frac{\partial g_1}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)\right]\delta x_1(t) + \left[\frac{\partial L}{\partial x_2} + \lambda\frac{\partial g_1}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)\right]\delta x_2(t)\right\}dt = 0 \tag{16}$$

λ выберем так, чтобы 1 из […] была равна 0.

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} + \lambda\frac{\partial g_1}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = 0 \tag{17}$$

$$\delta I = \int_{t_0}^{\vartheta}\left[\frac{\partial L}{\partial x_1} + \lambda\frac{\partial g_1}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)\right]\delta x_1(t)\, dt = 0 \tag{18}$$

нет зависимости от $x_2 \Rightarrow$ к (18) применим лемму Лагранжа:

$\delta x_1(a) = \delta x_1(b) = 0;$

$f(x) = 0;$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} + \lambda\frac{\partial g_1}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = 0 \tag{19}$$

(17) и (19) совпадают с (9) и (10).

Составляем новый функционал:

$$I_1 = \int_{t_0}^{\vartheta}\Phi\, dt \tag{20}$$

где $\Phi = L + \lambda(t)\cdot g(t, x_1(t), x_2(t))$

$x_1(t), x_2(t), \lambda(t)$

C_1, C_2, C_3, C_4 -?

Воспользуемся уравнением:

$g(t, x_1(t), x_2(t) = 0$ – отсюда $\lambda(t)$

$\Rightarrow$ условий достаточно.

<u>Необходимые условия в общем случае:</u>

(для этой задачи)

$$1)\ x^T = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \tag{21}$$

$$2)\ g(t, x(t)) = \begin{bmatrix} g_1(t, x(t)) \\ \vdots \\ g_m(t, x(t)) \end{bmatrix} \tag{22}$$

$$3)\ I_1 = \int_{t_0}^{\vartheta}\Phi\, dt$$

$$4)\ \Phi = L(t, x, \dot{x}) + \lambda^T(t)\cdot g(t, x(t)) \tag{23}$$

$$5)\ \lambda(t)=\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\\ \vdots\\ \lambda_m(t)\end{bmatrix} \qquad (24)$$

$$6)\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}}\right)=0 \qquad (25)$$

система уравнений $\begin{matrix}g_1(t,x(t))\\ \vdots\\ g_m(t,x(t))\end{matrix}$ -независима.

$$\Rightarrow\quad rang\begin{bmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}\cdots\dfrac{\partial g_1}{\partial x_n}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1}\cdots\dfrac{\partial g_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

если *rang* $<m$, то остальные зависимы (след. их откинуть), след. *rang* должен быть равен m.

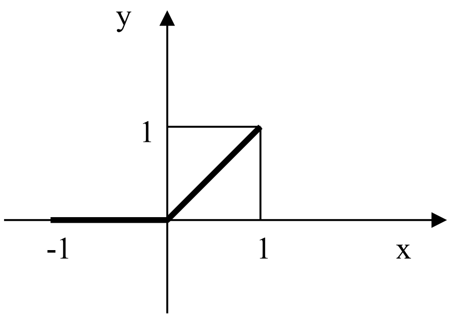
Условие Вейрштрасса-Эрдмана

$$\dot{y}=x \qquad (1)$$

$$x=-1 \qquad y=0 \qquad (2)$$

$$x=+1 \qquad y=1 \qquad (3)$$

$$I=\int_{-1}^{+1}x^2(1-\dot{x})^2\,dt \qquad (4)$$

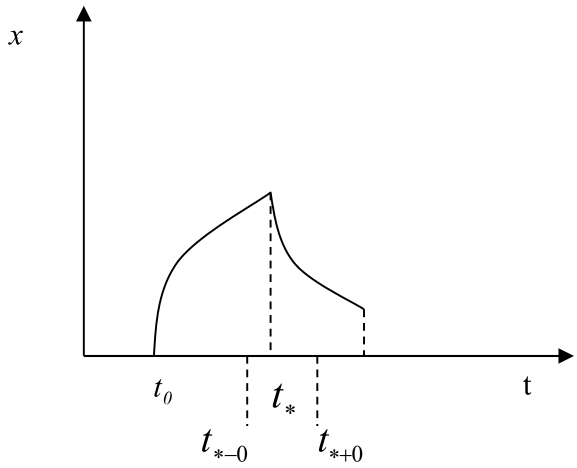


Кривая имеет точку излома. На основании метода вариационных исчислений не будет угловой точки. Если решение получится на кривой, принадлежащей точке излома, то в каждой точке излома должно выполняться условие Вейрштрасса-Эрдмана.

$$I=\int_{t_0}^{\vartheta}L\,dt \qquad (5)$$

$$\left[L-\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)\dot{x}\right]\Bigg|_{t=t_*-0}=\left[L-\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)\dot{x}\right]\Bigg|_{t=t_*+0} \qquad (6)$$

При выполнении (6) кривая изломов не терпит.



$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\Bigg|_{t=t_{*-0}} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\Bigg|_{t=t_{*+0}} \qquad (7)$$

Особенность условия Вейрштрасса-Эрдмана: функция в точках излома должна быть непрерывна.

$$I = \int_{t_0}^{t_{*-0}} Ldt + \int_{t_{*-0}}^{\vartheta} Ldt \qquad (8)$$

$$\delta I = \left[L - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x}\right]\Bigg|_{t=t_*-0} \delta t_* + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\Bigg|_{t=t_{*-0}} \delta x_{t_*} - \left[L - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x}\right]\Bigg|_{t=t_*+0}$$

Задача Майера

Определить минимум или максимум функционала, который зависит от:

$$I = R(\vartheta, x(\vartheta)) \qquad (1)$$

$t = t_0; x(t_0) = x_0$

(2)

$x^T = (x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t))$

$\vartheta - ?, x(\vartheta) - ?$

(3)

(правый конец свободен.)

$$g(t,x,\dot{x}) = \begin{bmatrix} g_1(t,x,\dot{x}) \\ g_2(t,x,\dot{x}) \\ \vdots \\ g_n(t,x,\dot{x}) \end{bmatrix} = 0 \qquad (4)$$

Критерий (терминальный) зависит от мон. ок. проц. и состояния системы в этот момент. От задачи Лагранжа всегда можно перейти к задаче Майера.

$$I = \int_{t_0}^{\vartheta} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \qquad (5)$$

введем: $\dfrac{dx_0}{dt} = L(t, x(t), \dot{x}(t))$ (6)

и н.у.: $t = t_0, x(t_0) = 0$ (7)

Возьмем новый критерий:

$I_1 = x_0(\vartheta)$

$$I_1 = x_0(\vartheta) = \int_{t_0}^{\vartheta} L dt = I \tag{8}$$

$g_{m+1} = \dfrac{dx_0}{dt} - L = 0$

(Т.к. у нас появилось дифференциальное уравнение, то в систему уравнений мы должны добавить еще одно уравнение.)

Перейдем к Лагранжу.

$$I_0 = R(\vartheta, x(\vartheta)) \tag{9}$$

$$I_1 = \int_{t_0}^{\vartheta} \left(\frac{dR}{DT} \right) dt \tag{10}$$

Вернемся к задаче 1.4:

Рассмотрим н.у., необходимые для решения задачи Майера:

($\delta I = 0$)

Т.к. задача на экстремум, то вводим функционал:

$$I_1 = R(\vartheta, x(\vartheta)) = \int_{t_0}^{\vartheta} \Phi dt \tag{11}$$

$$\Phi = \lambda^T(t) g(t, x, \dot{x}) \tag{12}$$

$\lambda^T(t) = [\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_m(t)]$

$$\delta I_1 = \delta R + \delta \left[\int_{t_0}^{\vartheta} \Phi dt \right] \tag{13}$$

$\vartheta \to \vartheta + \delta\vartheta$

$x_\vartheta \to x_\vartheta + \delta x_\vartheta$

$R = R(\vartheta + \delta\vartheta, x_\vartheta + \delta x_\vartheta) - R(\vartheta, x(\vartheta)) = \left.\dfrac{\partial R}{\partial t}\right|_{t=\vartheta} \delta\vartheta + \left.\left(\dfrac{\partial R}{\partial x}\right)^T\right|_{t=\vartheta} \delta x_\vartheta + \varepsilon(\delta, \delta x_\vartheta)$

$$\delta I = \left.\frac{\partial R}{\partial t}\right|_{t=\vartheta} \delta\vartheta + \left.\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^T\right|_{t=\vartheta} \delta x_\vartheta \tag{15}$$

$$\delta I_1 = \int_{t_0}^{\vartheta} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}}\right) \right] \delta x(t) dt + \left.\left[\Phi - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}}\right)^T \dot{x} \right]\right|_{t=\vartheta} \delta\vartheta + \left.\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}}\right)^T\right|_{t=\vartheta} \delta x_\vartheta + \left.\frac{\partial R}{\partial t}\right|_{t=\vartheta} \delta\vartheta + \left.\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^T\right|_{t=\vartheta} \delta x_\vartheta = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \tag{16}$$

$$\left.\left[\frac{\partial R}{\partial t} + \Phi - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}}\right)^T \dot{x} \right]\right|_{t=\vartheta} \delta\vartheta = 0 \tag{17}$$

$$\left.\left(\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} \right)^T\right|_{t=\vartheta} \delta x_\vartheta = 0 \tag{18}$$

Задача Больца

$$I = R\big(\vartheta, x(\vartheta)\big) + \int_{t_0}^{\vartheta} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \tag{1}$$

Функционал содержит интегральную и терминальную часть.

$t_0 - ?; x(t_0) - ?$

$$\vartheta - ?, x(\vartheta) - ? \tag{2}$$

$$g(t,x,\dot{x}) = \begin{bmatrix} g_1(t,x,\dot{x}) \\ g_2(t,x,\dot{x}) \\ \vdots \\ g_n(t,x,\dot{x}) \end{bmatrix} = 0 \tag{3}$$

Зададим еще условие такого вида:

$$\varphi_i = (t_0; x(t_0), \vartheta, x(\vartheta)) = 0 \tag{4}$$

$$rang \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_0}; \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{10}} \cdots \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{n0}}; \frac{\partial \varphi_1}{\partial \vartheta}; \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{1\vartheta}} \cdots \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{n\vartheta}} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_0}; \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{10}} \cdots \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{n0}}; \frac{\partial \varphi_k}{\partial \vartheta}; \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{1\vartheta}} \cdots \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{n\vartheta}} \end{bmatrix} = k \tag{5}$$

Если эти уравнения независимы, то $rang[\ ] = k \le 2n + 2$

$$I_1 = R\big(\vartheta, x(\vartheta)\big) + \int_{t_0}^{\vartheta} \Phi dt \tag{6}$$

$$\Phi = \lambda^T(t) g(t,x,\dot{x}) \tag{7}$$

$\lambda^T(t) = [\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_m(t)]$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \tag{8}$$

$$\left[\frac{\partial W}{\partial t} + \Phi - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}}\right)^T \dot{x}\right]\Bigg|_{t=t_0} \delta t_0 = 0 \tag{9}$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}}\right)^T\Bigg|_{t=t_0} \delta x_{t_0} = 0 \tag{10}$$

$$\left[\frac{\partial W}{\partial t} + \Phi - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}}\right)^T \dot{x}\right]\Bigg|_{t=\vartheta} \delta \vartheta = 0 \tag{11}$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}}\right)^T\Bigg|_{t=\vartheta} \delta x_{\vartheta} = 0 \tag{12}$$

$$W = R\big(\vartheta, x(\vartheta)\big) + \sum_{i=1}^{k} \mu_i \varphi_i \tag{13}$$

Если решение ищется среди кривых, имеющих точку излома, то в точке должно выполняться условие Вейрштрасса-Эрдмана.

$$\left[\Phi-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}}\right)\dot{x}\right]\Bigg|_{t=\xi-0}=\left[\Phi-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}}\right)\dot{x}\right]\Bigg|_{t=\xi+0}$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}}\right)\Bigg|_{t=\xi-0}=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}}\right)\Bigg|_{t=\xi+0}$$

Следовательно, условий достаточно для определения всех величин.

Задача о стабилизации спутника в заданном направлении

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=\omega_z\\&\frac{\partial\omega_z}{\partial t}=u\end{aligned}\tag{1}$$

н.у.:

$$t=t_0,\vartheta(t_0)=\vartheta_0,\omega_z(t_0)=\omega_{z0}\tag{2}$$

$$T-?,\omega_z(T)=0\tag{3}$$

$$I=\frac{1}{2}\left(\vartheta(T)-\vartheta_{зад}\right)^2+\int_{t_0}^{\vartheta}\frac{1}{2}u^2dt\tag{4}$$

Запишем необходимые условия для решения задачи Больца.

$$I_1=\frac{1}{2}\left(\vartheta(T)-\vartheta_{зад}\right)^2+\int_{t_0}^{\vartheta}\Phi dt\tag{5}$$

$$\Phi=\frac{1}{2}u^2+\left[\lambda_1(t),\lambda_2(t)\right]\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial t}-\omega_z\\\dfrac{\partial\omega_z}{\partial t}-u\end{bmatrix}=\frac{1}{2}u^2+\lambda_1(t)\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t}-\omega_z\right)+\lambda_2(t)\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial t}-u\right)$$

$$z=\begin{bmatrix}\vartheta\\\omega_z\\u\end{bmatrix}\tag{6}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{z}}\right)=0\tag{7}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{\vartheta}}\right)=0\tag{8}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\omega_z}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{\omega}_z}\right)=0\tag{9}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{u}}\right)=0\tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} &0-\frac{d}{dt}(\lambda_1)=0 \\ &-\lambda_1-\frac{d}{dt}(\lambda_2)=0 \\ &u-\lambda_2=0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} &\frac{d\lambda_1}{dt}=0 \\ &\frac{d\lambda_2}{dt}=-\lambda_1 \\ &\tilde{u}=\lambda_2(t) \end{aligned}\right\} \qquad (11),(12)$$

Условия трансверсальности:

$$\left[\frac{\partial R}{\partial t}+\Phi-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{z}}\right)^T \dot{z}\right]\Bigg|_{t=T} \delta T=0 \qquad (13)$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t}+\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{z}}\right)^T\Bigg|_{t=T} \delta z_T=0 \qquad (14)$$

$\frac{\partial R}{\partial t}$=0

$$\frac{\partial R}{\partial z}=\begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial R}{\partial \omega_z} \\ \frac{\partial R}{\partial u} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \vartheta-\vartheta_{зад} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta z_T=\begin{bmatrix} \delta\vartheta_T \\ \delta\omega_{zT} \\ \delta u_T \end{bmatrix}$$