2 РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ФРАКТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

2.1 Основные понятия и определения фрактальной геометрии

При исследовании функционирования, оценке показателей точности и помехозащищенности комплексов ракетно-артиллерийского вооружения с системами самонаведения и самоприцеливания существует необходимость воспроизведения изображений подстилающей поверхности. Важной характеристикой подстилающей поверхности является ее пространственно – временная структура, которая может быть учтена при использовании моделей изображений в виде случайных полей. Известно достаточно большое количество методов моделирования таких полей /3 ,4/. В последнее время большое внимание уделяется стохастическим полям с фрактальными свойствами в связи с широким распространением аппарата фрактальной геометрии в различных областях.

Термин фрактал впервые был введен Бенуа Мандельбротом . Он вывел это понятие на основе теории фрактальной размерности Хаусдорфа , предложенной в 1919. Но первые работы посвященные этим структурам были сделаны гораздо раньше. Траектории частиц броуновского движения, которым и занимались Роберт Броун еще в 1838 году и Алберт Эйнштейн в 1905 году, представляют собой пример фрактальных кривых, хотя их математическое описание было дано только в 1923 году Винером. В 1890 году Пеано сконструировал кривую – непрерывное отображение , переводящее отрезок в квадрат и , следовательно , повышающее его размерность с единицы до двойки. Граница Снежинки Коха (1904 год), чья размерность больше единицы ,- это еще одна хорошо известная кривая, повышающая размерность. Фрактал ,не похожий на кривую, который Мандельброт назвал пылью – это классическое множество Кантора (1875 или ранее).

Мандельброт предложил следующее определение фрактала :фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа которого строго больше его топологической размерности /4/. Необходимо ввести определения топологической размерности и размерности Хаусдорфа. Определение размерности Хаусдорфа:

Для определения меры величины множества точек в пространстве введем некоторую пробную функцию $h(\delta)=\gamma(d)\cdot\delta^{d}$,где $\gamma(d)$ - геометрический множитель, d – размерность меры и покроем множество ,образуя меру $M_d=\sum h(\delta)$. Размерность Хаусдорфа множества A ($\dim_H(A)$) есть критическая размерность при которой мера M_d изменяет свое значение с нуля на бесконечность:

$$M_d=\sum\gamma(d)\delta^{d}=\gamma(d)N(\delta)\delta^{d}\xrightarrow[\delta\to0]{}\begin{pmatrix}0,d>\dim_H(A)\\ \infty,d<\dim_H(A)\end{pmatrix},\qquad(1)$$

где N(δ) - число отрезков необходимых для покрытия множества.

M_d называется d – мерой множества. Значение M_d при d равной размерности Хаусдорфа часто конечно, но может быть равно нулю или бесконечности; существенно при каком именно значении d величина M_d изменяется скачком. Следует заметить что размерность Хаусдорфа фигурирует как локальное свойство в том смысле, что эта размерность характеризует свойства множеств точек в пределе при исчезающем малом диаметре, или размере, δ пробной функции, используемой для покрытия множества. Следовательно, фрактальная размерность может быть также локальной характеристикой множества.

Топологическая размерность определяется индуктивным способом и поэтому иногда называется индуктивной размерностью. Топологическая размерность пространства R^n равна $\dim_T(R^n)=n$ /2/.

Определение фрактальной размерности может быть использовано на практике. К примеру для определения фрактальной размерности береговой линии мы будем покрывать ее множеством квадратов со стороной δ. Подсчитав число квадратов, необходимых для покрытия береговой линии, мы получим число N(δ). Из формулы (1) следует что $N(\delta)\approx1/\delta^{D}$ и мы можем определить фрактальную размерность береговой линии измерив угловой коэффициент графика ln(N(δ)) как функции от ln(δ). Размерность определенную таким образом называют клеточной размерностью.

Другим важным свойством фракталов и фрактальной геометрии является самоподобие и самоаффиность. Ограниченное фрактальное множество точек L самоподобно с отношением подобия r, если L является объединением N непересекающихся подмножеств $L_1,\ldots,L_N$, каждое из которых конгруэнтно множеству r(L), получаемому из L с помощью из L с помощью преобразования подобия с $0<r<1$.Свойство конгруэнтности означает, что множество точек L_i совпадает с множеством точек r(L) после переноса и поворота. Множество L статистически автомодельно, если оно является объединением N отдельных подмножеств, каждое из которых получено из L преобразованием подобия с коэффициентом r(0<r<1) и обладает в точности теми же статистическими свойствами, что и r(L). Часто случайные множества, например береговая линия, являются самоподобными не только для некоторого значения коэффициента подобия , но и для целого ряда его значений, превышающих некоторый нижний предел(микромасштаб) и меньших некоторого верхнего предела (макромасштаб). Во многих физических процессах встречаются несамоподбные множества. Например, в случае броуновской частицы ее координата и время являются разными физическими величинами, и пространственный и временной масштабы будут иметь разные коэффициенты подобия. Такие множества называются самоаффиными. Аффинное преобразование переводит точку x =(x1, ..., xe) в новую точку с координатами $x=(r_1x_1, ..., r_ex_e)$, где не все коэффициенты подобия $r_1..., r_e$ одинаковы. Ограниченное множество L самоаффинно по отношению к вектору подобия r = $(r_1,..., r_e)$, если L является объединением N непересекающихся подмножеств L1*,...,* Le*,* каждое из которых конгруэнтно множеству r(L*),* получаемому из L с помощью аффинного преобразования, которое определяется вектором r. Свойство конгруэнтности означает, что множество точек *У^* совпадает с множеством точек r(L) после переноса или поворота.

Множество L статистически самоаффинно*,* если L является объединением N непересекающихся подмножеств, каждое из которых получено из исходного множества аффинным преобразованием с помощью r и имеет в точности те же статистические свойства, что и r(L).

Фрактальными свойствами обладают изображения многих природных объектов. Их фрактальная размерность может колебаться в достаточно широких пределах. Так, размерность линии очертания облаков для различных сезонов может колебаться в пределах от 1,2 до 1,8. Для подстилающих поверхностей, в частности для горных ландшафтов эта размерность лежит в пределах 2,2-2,5. Имеется связь между фрактальной размерностью и спектральной плотностью. Как показано в работе /2/, к полям с фрактальными свойствами относят поля, у которых спектральная плотность может быть описана следующим соотношением:

$$S(\omega) \propto \frac{1}{\omega^{\beta}}, \beta \in (n, n+2) \qquad (2)$$

где n – размерность поля. Связь между фрактальной размерностью и показателем β имеет вид

$$D=(3*n+2-\beta)/2 \qquad (3)$$

Пределы изменения показателя β определяются следующими причинами. При β спектральной плотности не существует (интеграл от спектральной плотности расходится), при β случайное поле является дифференцируемым. Такми образом фрактальные поля являются недифференцируемыми. Ниже приведены другие модели фрактальных спектральных плотностей.

Изображение с корреляционной функцией типа обобщенной экспоненты представлено следующими соотношениями

$$\begin{gathered} S(u)=\frac{c}{(a^2+u^2)^{\beta/2}} \\ c=\pi^{-2}a^{\beta-2}\Gamma(\beta/2)\Gamma(-\beta/2)\sin(\beta/2-1)\pi \end{gathered} \qquad (4)$$

где Γ – гамма – функция.

Представляя корреляционную функцию через функцию Бесселя нулевого порядка и вычисляя интеграл можно получить следующее соотношение:

$$R(x)=1-\Gamma(2-\beta/2)\Gamma^{-1}(\beta/2)a^{\beta-2}2^{2-\beta}x^{\beta-2}+ \qquad (5)$$

При β=3, корреляционная функция будет иметь вид $R(x)=\exp(-a|x|)$, таким образом можно назвать обобщенной экспонентой.

Изображение со спектральной плотность с ограниченными фрактальными свойствами представлено соотношением вида:

$$\begin{gathered} S(u)=\left\{\begin{matrix} b_0 & u\in(0,u_a \\ k_0/u^\beta & \mathrm{u}\in(\mathrm{u_a},\mathrm{u_b}) \\ 0 & \mathrm{u}\in(\mathrm{u_b},\infty) \end{matrix}\right\} \\ k_0=k_{fr}\,\frac{(2-\beta)}{2\pi(u_b^{2-\beta}-u_a^{2-\beta})} \\ k_{fr}=1-\pi b(u_a^2-u_b^2) \end{gathered} \qquad (6)$$

Данная модель задает поле с ограниченными фрактальными свойствами, а именно на интервале фрактальности $[u_a, u_b]$ спектральная плотность имеет вид $1/u^\beta$. Введем коэффициент фрактальности k_{fr}, который определяет, какую часть площади под спектральной плотностью занимает фрактальная часть. Подобными моделями удобно описывать излучение некоторых типов облачности. В работе /5/ описаны экспериментально снятые характеристики излучения облачности, при этом фрактальные свойства наблюдались до некоторого определенного пространственного размера. Корреляционная функция соответствующая данной спектральной плотности

$$R(x) = \pi \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \frac{(-1)^k 2^{1-2k}}{k!\Gamma(k+1)} \times (b_0 \frac{u_b^{2k+2} - u_a^{2k-2}}{2k+2} + k_0 \frac{u_a^{2k+2-\beta} - u_b^{2k+2-\beta}}{2k+2})$$

Векторное фрактальное поле может быть представлено матричной спектральной плотностью:

$$S = \begin{vmatrix} S(u,\beta_1) & \rho\sqrt{S(u,\beta_1)S(u,\beta_2)} \\ \rho\sqrt{S(u,\beta_1)S(u,\beta_2)} & S(u,\beta_2) \end{vmatrix}$$

где ρ - коэффициент корреляции, а $S(u,\beta_i)$, i=1,2 – одна из моделей спектральной плотности, введенной выше. При этом компоненты будут иметь фрактальную размерность $D_1=(8-\beta_1)/2$, $D_2=(8-\beta_2)/2$ Совместная фрактальная размерность векторного изображения будет $D_{1,2}=(8-\beta_{1,2})$.