

2.2 Методы моделирования фрактальных изображений и их сравнительная оценка

1. Фрактальное броуновское движение (ФБД) (метод Фосса) впервые было исследовано Мандельбротом и Ван Нессом в 1968 году. ФБД является более общим случаем по сравнению с классическим броуновским движением (винеровский процесс). Гауссовский процесс называется ФБД с параметром H ($0 < H < 1$), если он обладает свойством гауссовости приращений: случайная величина

$$\Delta X = X(t_2) - X(t_1), \quad M(\Delta X) = 0, \quad D(\Delta X) = \sigma^2 (t_2 - t_1)^{2H} \quad (7)$$

имеет гауссовское распределение,

где M – символ математического ожидания;

D – символ дисперсии,

$t_2 > t_1$, и σ – положительная константа. При параметре $H=0,5$ ФБД совпадает с винеровским процессом. В отличие от винеровского процесса, приращения которого независимы, ФБД не обладает этим свойством $M(X(t)-X(0)(X(t+\Delta t))=0,5\sigma^2((t+\Delta t)^{2H}-t^{2H}+\Delta t^{2H})$. При $H \neq 0,5$ ФБД не обладает марковским свойством. В работе [3] показано, что ФБД является почти, наверное, недифференцируемым случайным полем, а следовательно обладает фрактальными свойствами. Другим важным свойством ФБД является статистическое самоподобие: приращения ФБД статистически самоподобны, то есть

$$X(t + \Delta t) - X(t) = \frac{1}{r^H} (X(t + r\Delta t) - X(t)) \quad \text{для любого } r > 0.$$

Выделим статистические характеристики ФБД:

$$\begin{aligned} M(X(t)) &= 0, \quad D(X(t)) = t^{2H}, \\ R_x(t_1, t_2) &= (2^{2H-1}) \cdot \min(t_1, t_2)^{2H}, \quad S_x(\omega) = \frac{K(\beta)}{\omega^\beta}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $R(t_1, t_2)$ – ковариационная функция,

$S(\omega)$ – спектральная плотность,

$\beta=2H+1$ (случайный процесс), $\beta=H+1$ (двумерное поле) – показатель убывания спектральной плотности,

K – константа зависящая от показателя убывания спектральной плотности. Из (3) следует, что ФБД является нестационарным в широком смысле случайным полем и это поле в общем случае не приводимо к стационарному.

Фрактальная размерность реализаций ФБД равна

$$D=n+1-H, \quad (9)$$

где n – мерность реализации, H – показатель использованный при моделировании.

Для моделирования ФБД можно воспользоваться методом последовательных случайных сложений (метод Фосса) /3, 4/. Основными преимуществами данного подхода являются высокое быстродействие, возможность обобщения для размерности $n \geq 3$, возможность моделирования поля с «привязкой» к заданным реперным точкам. К недостаткам данного метода следует отнести невозможность обобщения на векторный случай.

2. Моделирование случайного поля по спектральным характеристикам. Метод основан на многомерном обобщении представления Райса – Пирсона для стационарных случайных процессов. В случае двумерного случайного поля можно записать:

$$X(r_1 \Delta t_1, r_2 \Delta t_2) = \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=1}^M |A(k_1 \Delta \omega_1, k_2 \Delta \omega_2)| \cos(k_1 \Delta \omega_1 r_1 \Delta t_1, k_2 \Delta \omega_2 r_2 \Delta t_2 + \Psi(k_1 \Delta \omega_1, k_2 \Delta \omega_2) + \alpha(k_1, k_2)), \quad (10)$$

где $X(r_1 \Delta t_1, r_2 \Delta t_2)$ – дискретные отсчеты поля, взятые в узлах прямоугольной сетки с шагом по осям

Δt_1 и Δt_2 ; $\Delta \omega_1$ и $\Delta \omega_2$ – интервалы дискретизации спектральных характеристик поля; $\alpha(k_1, k_2)$ – независимые случайные величины, равномерно распределенные в интервале $(0, 2\pi)$; $|A(k_1 \Delta \omega_1, k_2 \Delta \omega_2)|$ и $\Psi(k_1 \Delta \omega_1, k_2 \Delta \omega_2)$ можно трактовать как модуль и аргумент некоторого комплексного числа:

$$\dot{A}(k_1 \Delta \omega_1, k_2 \Delta \omega_2) = |A(k_1 \Delta \omega_1, k_2 \Delta \omega_2)| \exp(j \psi(k_1 \Delta \omega_1, k_2 \Delta \omega_2)) \quad (11)$$

Преобразование Фурье соотношения (5) приводит к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} \dot{G}(k_1 \Delta \omega_1, k_2 \Delta \omega_2) &= \frac{1}{2} \dot{A}(k_1 \Delta \omega_1, k_2 \Delta \omega_2) \exp(j \alpha(k_1 \Delta \omega_1, k_2 \Delta \omega_2)) \\ \dot{G}(k_1 \Delta \omega_1, 0) &= \dot{A}(k_1 \Delta \omega_1, 0) \exp(j \alpha(k_1 \Delta \omega_1, 0)) \end{aligned} \quad (12)$$

Неизвестные составляющие можно найти согласно /6/:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} A(k_1 \Delta \omega_1, k_2 \Delta \omega_2) A^*(k_1 \Delta \omega_1, k_2 \Delta \omega_2) &= \Delta \omega_1 \Delta \omega_2 S(k_1 \Delta \omega_1, k_2 \Delta \omega_2) \\ \frac{1}{2} A(k_1 \Delta \omega_1, 0) A^*(k_1 \Delta \omega_1, 0) &= \Delta \omega_1 \Delta \omega_2 S(k_1 \Delta \omega_1, 0), \end{aligned}$$

где * - символ комплексного сопряжения;.

$S(k_1\Delta\omega_1, k_2\Delta\omega_2)$ - отсчеты спектральной плотности поля.

Для моделирования случайного поля достаточно сформировать его спектральные отсчеты согласно (11) и вычислить обратное дискретное преобразование Фурье с помощью одного из алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Основными преимуществами данного метода является высокое быстродействие вследствие использования процедур быстрого преобразования Фурье, возможность обобщения на векторный случай.

3. Моделирование случайных полей на основе параметрических моделей.

В работах /7, 8/ поле рельефа полагается гауссовским, однородным в статистическом смысле. Его вероятностные характеристики (ковариационная функция или спектральная плотность) оцениваются по разрезам. Разрез рельефа вдоль заданной прямой рассматривается как реализация стационарного случайного процесса. В работе /8/ приведены типовые модели $s_n(\omega)$ спектральных плотностей и получены формулы связи параметров σ_ξ, α с используемыми в геоморфологии показателями вертикальной и горизонтальной расчлененности рельефа. Показатель глубины расчлененности a определяется как средняя разность высот соседних экстремумов, показатель горизонтальной расчлененности b – как среднее расстояние между точками экстремумов. Формулы связи имеют вид

$$\sigma_\xi = c_1 a; \quad \alpha = \frac{c_2}{b} \quad (13)$$

где c_1, c_2 – некоторые постоянные, значения которых указаны в табл.2.6.

Таблица 4

Размерность	$s_n(\omega)$	c_1	c_2
n	$\frac{(2n-2)!! \alpha^{2n-1} \sigma_\xi^2}{(2n-3)!! \pi (\omega^2 + \alpha^2)^n}$	$\sqrt{\frac{3(2n-3)}{2\pi(2n-5)}}$	$\frac{\pi \sqrt{2n-3}}{\sqrt{3}}$
3	$\frac{8\alpha^5 \sigma_\xi^2}{3\pi(\omega^2 + \alpha^2)^3}$	1,20	π

4	$\frac{16\alpha^7 \sigma_\xi^2}{5\pi(\omega^2 + \alpha^2)^4}$	0,89	4,05
∞	$\frac{\sigma_\xi^2}{2\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\omega^2/4\alpha^2}$	$\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \approx 0,69$	$\frac{\pi}{\sqrt{6}} \approx 1,28$

где $!!(x) = \Gamma(x)/(\pi^{1/2}\Gamma(x-1/2))$ – нормирующая постоянная определенная условием

$$\int_{R^n} s_n(\omega) d\omega = 1$$

где Γ – гамма – функция.

Величина $n \geq 3$ является характеристикой гладкости рельефа. Переход при $n \rightarrow \infty$ к пределу дает выражение

$$s_\infty(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(\omega) = \frac{\sigma_\infty^2}{2\sqrt{\pi}\alpha} e^{-\omega^2/4\alpha^2} \quad (14)$$

спектральной плотности бесконечно дифференцируемого случайного процесса.

При $1 < n < 3$ процессы со спектральной плотностью являются почти наверное недифференцируемыми. В этом случае из табл 4 следует что коэффициенты s_1 и s_2 являются комплексными числами. Таким образом для моделирования таких полей следует назначать параметры спектральной плотности руководствуясь априорными информацией без участия показателей расчлененности.

Представление (14) используется в большинстве работ по моделированию рельефа. В ряде случаев применяются недифференцируемые аппроксимации

$$\rho(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \quad (15)$$

корреляционной функции рельефа. Эти аппроксимации соответствуют обобщенной фрактальной экспоненте (4) и имеют фрактальную размерность равную 1.5. Сглаживание реализаций процесса с корреляционной функцией (5), осуществляемое аperiodическим звеном, приводит к характеристикам

$$s(\omega) = \sigma_\xi^2 \frac{\varepsilon\alpha(\alpha + \varepsilon)}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)(\omega^2 + \varepsilon^2)}, \quad (16)$$

$$R(\tau) = \frac{\sigma_\xi^2}{(\alpha - \varepsilon)} \left[\alpha e^{-\varepsilon|\tau|} - \varepsilon e^{-\alpha|\tau|} \right] \quad (17)$$

где σ_ξ - дисперсия, α, ε - параметры, определяемые по показателям расчлененности рельефа.

Переход от разреза к двумерным характеристикам требует дополнительных предположений. Как правило, поле рельефа полагается изотропным или эллиптически анизотропным. Учет эллиптической анизотропии осуществляется простым изменением масштаба (сжатием или растяжением) по одной из координат изотропного случайного поля. Спектральные плотности стационарных случайных процессов, пригодные для описания изотропных полей, должны удовлетворять условию монотонности /7/

$$\frac{ds}{d\omega} \leq 0 \quad \omega \in (0, +\infty). \quad (18)$$

Условие (18) выполняется для функций (15) – (17), а также для приведенных в табл.4. Однако при $n < 1$ это условие не выполняется и интеграл от спектральной плотности расходится.

Примем математическое описание рельефа в виде гауссовского двумерного изотропного случайного поля с нулевым средним. Считаем заданной спектральную плотность $s(\omega)$ одномерного разреза, для которой полагаем выполненным условие (18) монотонного убывания. Из формул /7/ для данного поля получаем представление

$$X_N(t_1, t_2) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{j=1}^N z_j \sin(V_j(t_1 \cos(\varphi_{1j}) + t_2 \sin(\varphi_{1j})) + \varphi_{2j} \quad (19)$$

где φ_{ij} – равномерно распределенные на интервале $[0, 2\pi]$ случайные числа; величины

V_j – независимые реализации положительной случайной величины с плотностью распределения

$$f(y) = -2y \int_y^{\infty} \frac{s'(\omega)}{\sqrt{\omega^2 - y^2}} d\omega.$$

Алгоритм моделирования случайной величины с этим распределением изложен в /7/. Для получения фрактального поля необходимо $1 < n < 3$.

Сравнительная оценка рассмотренных методов моделирования фрактальных поверхностей представлена в таблице .

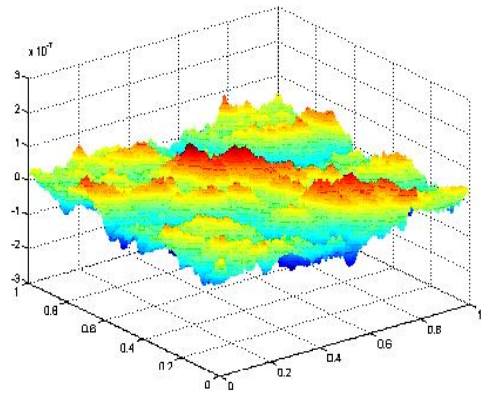
Таблица .5

Метод моделирования	Относительный объем вычислений	Ограничения на вид спектральной плотности	Возможность использования реперных точек	Возможность моделирования векторных полей
Параметрический	1	да	нет	Да
Спектральный синтез	0.7	нет	нет	Да
Фосса	0,5	да	да	Нет

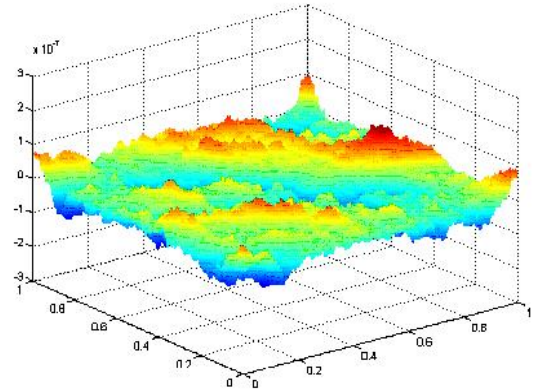
Сравнение объема вычислений выполнялось по отношению к параметрической модели случайного поля при числе гармоник $N=50$.

На основании выполненных исследований для моделирования изображения подстилающей поверхности может быть рекомендован метод Фосса, аппроксимирующий ФБД. Этот метод может быть особенно полезен при моделировании подстилающей поверхности по реперным точкам. Тем не менее ограничения на вид спектральной плотности (невозможность моделирования полей с ограниченным интервалом фрактальности) делают применение этого метода невозможным в достаточно широком классе задач. В случае моделирования многокомпонентных случайных полей, а также полей со спектральной плотностью вида (6) может быть рекомендован метод спектрального синтеза.

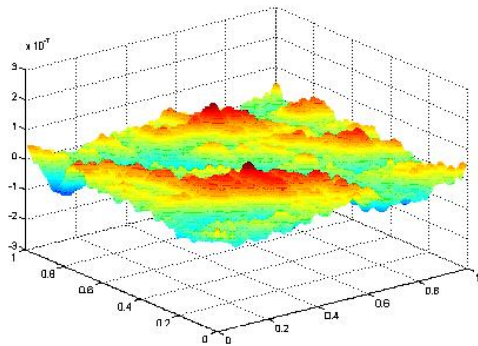
На рис 1 представлены результаты моделирования изображения поверхности со спектральной плотностью (6) на сетке с разрешением $(2^9; 2^9)$ для различных значений интервалов фрактальности $[u_a, u_b]$. Сторона сетки имеет размер 10 км. Параметры спектральной плотности: $\beta=1.7$, $b_0=0$, $k_0=1$, $u_b=\infty$.



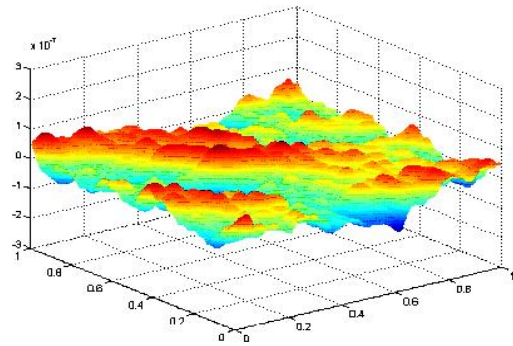
а)



б)



в)



г)

Рис. 1

На рис а, б, в, г) изображены реализации случайных полей с нижней границей фрактальности α_a равной соответственно 0, 0.0002, 0.001, 0.01. То есть рис.1 а) соответствует полю с бесконечным интервалом фрактальности, а рис в) соответствует практически не фрактальному полю.