## 2.4 Разработка алгоритмов моделирования фрактальных поверхностей на основе фрактального броуновского движения.

На основании исследований проведенных в разделе 2.2 и исходя из задач поставленных в разделе 1.3 для моделирования фрактальных поверхностей был выбран метод серединного смещения (метод Фосса).

Метод базируется на процедуре рекурсивного деления участков прямой или, в случае - поля, поверхности и позволяет получать реализацию ФБД с разрешением которое зависит от числа итераций. Рассмотрим последовательно алгоритм для моделирования одномерных и двумерных полей и докажем что данный алгоритм моделирует все статистические свойства ФБД (7).

Алгоритм моделирования одномерных поверхностей. В данном алгоритме реализация X(t) вычисляется на диадических рациональных числах, то есть в точках $k/2^n$ интервала [0,1]. Реализации X(t) строятся последовательно в конечных точках 0 и 1, затем в 1/2, потом в 1/4 и 3/4 и так далее, причем таким образом, что закон дисперсии для приращений (1) выполняется для этих точек. Первая и вторая итерация представлены на Рис. 5.

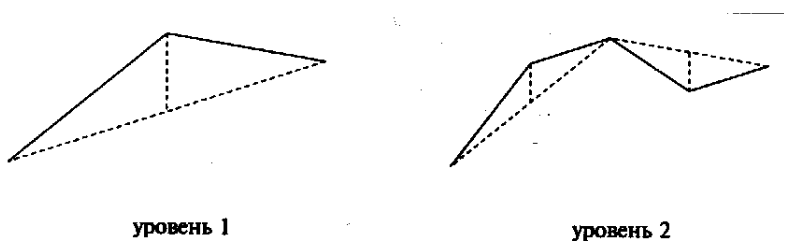



Рис. 5

Для построения одномерного ФБД необходимо выполнить следующие шаги:

Шаг 1:
$$X(1/2) = 0{,}5(X(0) + X(1)) + \frac{1}{2^H}\sigma\rho g$$

Шаг 2:
$$X(1/4) = 0{,}5(X(0) + X(1/2)) + \frac{1}{2^{2H}}\sigma\rho g$$
$$X(3/4) = 0{,}5(X(1/2) + X(1)) + \frac{1}{2^{2H}}\sigma\rho g$$

Шаг n:

$$X(1/2^n) = 0{,}5(X(0) + X(1/2^{n-1})) + \frac{1}{2^{nH}}\sigma\rho g$$

•

•

$$X(1-1/2^n) = 0{,}5(X(1-1/2^{n-1}) + X(1)) + \frac{1}{2^{nH}}\sigma\rho g \qquad (24)$$

где g-реализация гауссового случайное число с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

параметр ρ определяется формулой

$$\rho = \sqrt{1-2^{2H-2}}$$

σ - параметр вертикального масштаба.

Нетрудно доказать что значения X(t) полученные в результате работы алгоритма будут удовлетворять закону статистическим характеристикам (7-9). Доказательство приведено в приложении 2.

Этот алгоритм нетрудно обобщить и на случай двумерного поля. В этом случае в качестве значения X в середине квадрата берется среднее по его вершинам плюс случайное смещение gr, где g – нормальная случайная вели чина, а r – величина смещения которая зависит от текущего шага построения. Присваивания осуществляются в два этапа: квадраты со сторонами параллельными осям координат, чередуются с квадратами, образованными диагоналями. Это поясняет Рис. 6, где величины X(A),X(B),X(C),X(D),X(E),X(F) предполагаются уже заданными. На первом этапе мы определяем X(G) и X(H) по формулам

$$\mathrm{X(G) = 0{,}25(X(A) + X(B) + X(E) + X(F)) + gr,}$$
$$\mathrm{X(G) = 0{,}25(X(B) + X(C) + X(D) + X(E)) + gr,}$$

где

$$r = \frac{r}{2^{0{,}5H}}$$

После этого приступаем ко второму этапу:

$$\mathrm{X(I) = 0{,}25(X(G) + X(B) + X(H) + X(E)) + gr,}$$

В граничных точках формулы изменяются: производиться усреднение по имеющимся граничным точкам с добавлением соответствующих случайных смещений. /   /

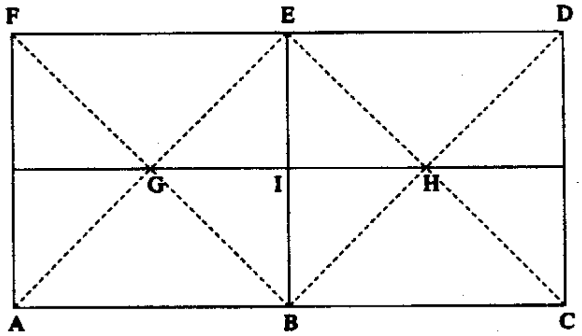



Рис. 6

Фрактальная размерность реализаций ФБД равна

$$D=n+1-H,$$

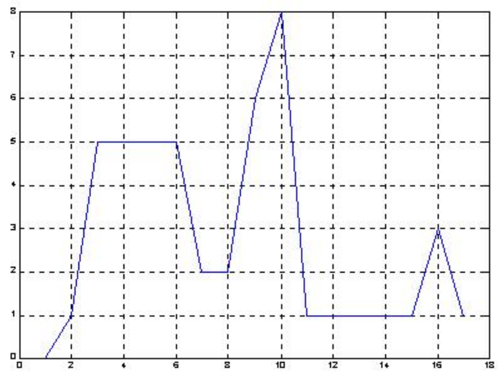
где n – мерность реализации, H – показатель использовавшийся при моделировании.

В данной работе предложено использовать метод серединного смещения для моделирования ландшафтных сюжетов по реперным точкам. Для начала итераций необходимо задать реперные точки на сетке $[2^m+1, 2^m+1]$ где m целое положительное число. Таким образом, мы начинаем итерационную процедуру (24) с шага m+1, причем шаги, начиная с 1 и до m считаются выполненными, а результат – матрица реперных точек.

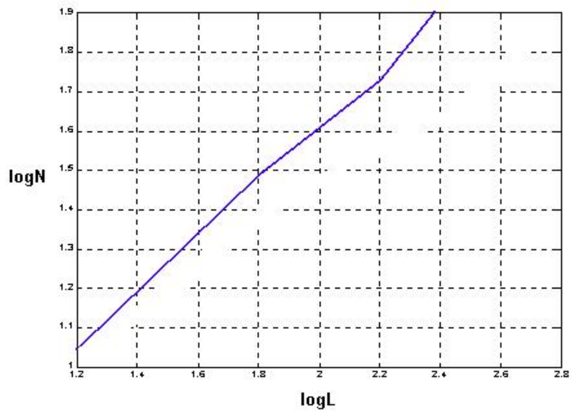
При таком моделировании возникает вопрос о том какая фрактальная размерность будет у результатирующего изображения. В этом случае изображение получается неоднородным, то есть различные фрагменты изображения обладают различной фрактальной размерностью. На рис. 7 изображены результаты моделирования случайного процесса по реперным точкам.

а)

б)



в)




г)

Рис 7

Моделирование выполнялось по реперным точкам изображенным на рис 7 в) m=4. Исходные реперная кривая не фрактальна. Моделирование проводилось методом Фосса с параметром H=0.7. На рис 7 а,б) изображены реализации кривой, причем в а) начальное значение множителя r принималось равным единице, а в б) равным среднему по реперным точкам. На рис 7 г) изображены результаты обработки реализации кривой из а). Из графика обработки видно что реализация неоднородна: на интервале запаздывания $\tau>64$ оценка показателя $H\approx1$, то есть кривая не фрактальна, но на более низких интервалах оценка показателя $H\approx0.65$, что близко к теоретическому значению H для данной кривой.

На основании полученных результатов можно сделать вывод что метод Фосса возможно, использовать для моделирования поверхностей и кривых по реперным точкам.